

**Weiche, elektromagnetische Bremsstrahlung
in hadronischen Vielteilchen-Reaktionen**

Reinhold Rückl

1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Weiche, elektromagnetische Bremsstrahlung
in hadronischen Vielteilchen-Reaktionen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Reinhold Rückl

München

1976

1. Berichterstatter: Priv. Doz. Dr. J. Benecke

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juli 1976



Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die weiche, elektromagnetische Bremsstrahlung in inelastischen Hadronreaktionen bei hohen Energien untersucht. Unter Vernachlässigung aller Rückstoßeffekte bei der Photonemission auf die Hadronen wird das inklusive Bremsstrahlungsspektrum berechnet und durch einfache hadronische Parameter ausgedrückt, die direkt experimentell gemessen oder aus Daten bestimmt werden können. Dieses für kleine Photonenergien gültige, modellunabhängige Ergebnis dient als Grundlage für eine Diskussion des Bremsstrahlungsbeitrags zum inklusiven Photonspektrum in Proton-Proton-Reaktionen. Es wird gezeigt, in welchem kinematischen Bereich man Bremsstrahlungseffekte erwarten kann. Eine frühere Analyse von am CERN-ISR gemessenen Photonspektren von R.N. Cahn ergab einen Hinweis darauf, daß sich bei dem kleinsten experimentell erreichten Transversalimpuls (≈ 10 MeV) die Bremsstrahlung bemerkbar macht. Dieses Ergebnis wird bestätigt, wenn sich auch der Bremsstrahlungsbeitrag als um etwa die Hälfte niedriger herausstellt als von Cahn abgeschätzt. Unter der Annahme, daß sich virtuelle Photonen mit kleiner Masse ähnlich wie reelle verhalten, wird die Erzeugung von Leptonpaaren mit kleiner invarianter Masse und niedrigen Energien durch innere Konversion virtueller Bremsstrahlung untersucht. Die in einem im wesentlichen modellunabhängigen Infrarot-Limes berechneten Leptonraten in Proton-Proton-Reaktionen sind bemerkenswert hoch. Die Einleptonspektren wachsen rasch für große Produktionswinkel θ (im pp-Schwerpunktsystem) zu kleinen Transversalimpulsen p_T hin und für $\theta = 0^\circ$ zu kleinen x (Feynmanvariable) hin an. Das Elektron-Pion-Verhältnis für $p_T \leq 400$ MeV zeigt in etwa die kürzlich in einem ISR-Experiment beobachteten Eigenschaften. Für das Müon-Pion-Verhältnis wird ein um nahezu zwei Größenordnungen kleinerer Wert vorausgesagt.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einleitung	1
II. Ein kurzer Überblick über inklusive Hadronspektren und über elektromagnetische Bremsstrahlung	3
1. Inklusive Hadronspektren	3
1.1 Definitionen	3
1.2 Diskussion experimenteller Ergebnisse	7
2. Weiche Bremsstrahlung in Hadronreaktionen	13
2.1 Formale Berechnung des Bremsstrahlungsspektrums	13
2.2 Näherung für weiche Photonen	16
2.3 Bremsstrahlung klassischer, nicht-quantisierter Quellen; Vielphotonemission	19
2.4 Das inklusive, weiche Bremsstrahlungsspektrum	21
III. Parametrisierung des weichen Bremsstrahlungsspektrums in inklusive, hadronischen Größen	23
1. Cahn's einfache, aber unrealistische Approximation zur Orientierung	23
1.1 Beschreibung der Approximation	23
1.2 Kritik	25
2. Summenregel für die weiche Bremsstrahlung	28
3. Exakte Relation zwischen weicher Bremsstrahlung und mittlerem, quadratischen Ladungstransfer	33
3.1 Allgemeine Relation	33
3.2 Bremsstrahlung in Vorwärtsrichtung	38
4. Diskussion der Eigenschaften des Photonspektrums	43
4.1 Für große Winkel	43
4.2 In Vorwärtsrichtung	49
5. Numerische Abschätzung	50
5.1 Das Bremsstrahlungsspektrum bei $\theta = 90^\circ$	50
5.2 Das Bremsstrahlungsspektrum bei $\theta = 0^\circ$	55
6. Zusammenfassung	64

IV. Bremsstrahlungseffekte in inelastischen pp-Reaktionen bei hohen Energien	65
1. Bremsstrahlungsbeitrag zum inklusiven γ -Spektrum	66
2. Direkte Produktion von Leptonen durch weiche, virtuelle Bremsstrahlung	70
2.1 Experimentelle Fakten und mögliche Erklärungen	70
2.2 Die Leptonpaarspektren	73
2.3 Die Einleptonspektren	75
2.4 Vergleich mit Daten	79
2.5 Schlußfolgerungen	81
Literaturverzeichnis	82
Erklärungen zu den Figuren	85

I. Einleitung

Anders, als bei der Wechselwirkung geladener Leptonen, wo man zum Beispiel schon bei der Präparierung von e^+ , e^- -Strahlen in Speicherringen mit einer starken Synchrotronstrahlung fertig werden muß und eine sorgfältige Korrektur der gemessenen Größen auf Strahlungseffekte unumgänglich ist, führt die elektromagnetische Bremsstrahlung in hadronischen Reaktionen ein viel verborgeneres Dasein. Das liegt zum einen an der Kleinheit der elektromagnetischen Kopplungskonstanten α , verglichen mit der der starken Wechselwirkung:

$$\frac{\alpha}{g} \sim 0(10^{-2}).$$

Zum andern sind die Hadronen erheblich schwerer als die Elektronen und deshalb ist ihr $\mathcal{J}$ -Faktor ($\mathcal{J} = \frac{\text{Energie}}{\text{Masse}}$), ein zweiter entscheidender Parameter für die Intensität der Strahlung, bei gleicher Energie viel geringer:

$$\frac{\mathcal{J}_{\text{Pion}}}{\mathcal{J}_{\text{Elektron}}} = \frac{m_{\text{Elektron}}}{m_{\text{Pion}}} \sim 4 \cdot 10^{-3}.$$

Das beweist natürlich nicht, daß die Bremsstrahlung überhaupt keine Rolle spielt. Zwar wird man die äußere Bremsstrahlung, die entsteht, wenn geladene Hadronen durch den experimentellen Apparat fliegen, sicher vernachlässigen dürfen, unter Umständen aber nicht die innere Bremsstrahlung, die beim hadronischen Wechselwirkungsprozeß selbst emittiert wird. Es gibt zumindest zwei kinematische Bereiche, in denen letztere wichtig sein könnte:

- A) bei kleinen Photonenergien, wo die Photonrate wegen der bekannten Infrarotdivergenz^[1] rasch anwächst,
- B) bei großen Impulsüberträgen^{x)}, wenn die Vorstellung richtig ist, daß bei kleinen Abständen die hadronische Kopplungsstärke relativ zur elektromagnetischen abnimmt ("asymptotic freedom"^[2]).

Da man die der Photonproduktion in hadronischen Reaktionen zugrunde liegende Dynamik nicht kennt, erfordert jede Rechnung für harte Photonen sehr detaillierte ad hoc-Annahmen. Für weiche Photonen dagegen existiert ein modellunabhängiger Limes.

x) virtuelle Photonen mit großer Masse

In dieser Arbeit wird die weiche Bremsstrahlung in inelastischen Hadronreaktionen bei hohen Energien: $ab \rightarrow \gamma + \text{Hadronen}$ untersucht. Dabei können wir auf eine Summenregel^{x)} zurückgreifen, die es ermöglicht, das inklusive Bremsstrahlungsspektrum aus den einfachsten inklusiven Hadronspektren zu berechnen[3]. Bis jetzt existieren allerdings nur Abschätzungen[3,4], die zwar zu einem äußerst simplen Ergebnis führen, z.B. für Proton-Proton-Streuung im Schwerpunktsystem bei großen Winkeln:

$$\frac{\omega}{\sigma_{PP}} \frac{d\sigma^\gamma}{d^3k} \approx \frac{\alpha}{\pi^2 k_T^2} \langle \Delta^2 \rangle$$

($\langle \Delta^2 \rangle$ ist das mittlere Quadrat des hadronischen Ladungstransfers über die Rapidität $y = 0$, siehe II(1.13)), aber zu einigen Zweifeln Anlaß geben^{xx)}. Wir beseitigen diese Unsicherheiten, erreichen ein sowohl in seiner Struktur als auch numerisch verbessertes Ergebnis und erweitern die gesamte Rechnung auf kleine Winkel. Von dieser sicheren Basis aus betrachten wir zwei Beispiele, in denen vermutlich Bremsstrahlungseffekte sichtbar werden. Im ersten diskutieren wir den Bremsstrahlungsbeitrag zum experimentell gemessenen γ -Spektrum, das natürlich von den Photonen aus dem π^0 -Zerfall: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ dominiert wird. Wir folgen dabei einer Analyse des inklusiven γ -Spektrums hinsichtlich dieser beiden Quellen von R.N. Cahn[4]. Die Bremsstrahlungskomponente, die niedriger ist als in [4] angenommen, fällt nur bei extrem kleinen Photonenergien (einige MeV) ins Gewicht. Ihr Einfluß auf die beobachteten γ -Spektren hängt stark von der "Bin"-Breite und der Auflösung in der Energie im jeweiligen Experiment ab. Das zweite Beispiel behandelt ein momentan sehr aktuelles Problem, nämlich die bis jetzt noch ungeklärte, hohe Leptonrate bei hochenergetischer Proton-Proton-Streuung[5]^{xxx)}. Wir untersuchen die direkte Produktion von Leptonpaaren mit niedriger invarianter Masse und kleiner Energie durch innere Konversion weicher, virtueller Bremsstrahlung^{xxxx)}:

x) In der in [3] angegebenen Form steckt ein Vorzeichenfehler.

xx) Sie sind in III.1 näher begründet.

xxx) siehe IV.2.1.

xxxx) Mit "innerer Konversion" meinen wir denselben Prozeß, der auch dem bekannten Dalitzzerfall des π^0 -Mesons[6] zugrunde liegt:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma^* \rightarrow e^+ e^-$$

$$\begin{array}{c} pp \rightarrow \gamma + \text{Hadronen.} \\ \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad e^+e^- \end{array}$$

Die im wesentlichen modellunabhängige Rechnung liefert ein Elektron-Pion-Verhältnis bei kleinen Transversalimpulsen im pp-Schwerpunktsystem, das in etwa die kürzlich experimentell beobachteten Eigenschaften [7] zeigt. Das ist eines der Hauptergebnisse dieser Arbeit. Darüber hinaus erhalten wir Vorhersagen über das Müon-Pion-Verhältnis und die Leptonspektren in Vorwärtsrichtung bei kleinen Energien.

Die Arbeit besteht aus drei mehr oder weniger abgeschlossenen Teilen: Das II. Kapitel dient der Vorbereitung. Dort findet man die Notation, sowie die wichtigsten Definitionen und einen kurzen, völlig auf unsere Bedürfnisse zugeschnittenen Überblick über inklusive Hadronspektren. Außerdem wird die weiche Bremsstrahlung in einem etwas allgemeineren Rahmen diskutiert. Das III. Kapitel enthält die konkrete Berechnung des Bremsstrahlungsspektrums, samt einer eingehenden Diskussion seiner Eigenschaften. Im IV. Kapitel werden schließlich die beiden, kurz beschriebenen Beispiele untersucht.

II. Ein kurzer Überblick über inklusive Hadronspektren und über elektromagnetische Bremsstrahlung

Dieses Kapitel enthält alle formalen Dinge, wie Notation und Definitionen, sowie Ergebnisse von theoretischen und experimentellen Untersuchungen, soweit sie später benötigt werden.

1. Inklusive Hadronspektren

1.1 Die experimentelle, wie auch die theoretische Untersuchung inelastischer Hadronreaktionen bei hohen Energien ist wegen der großen Teilchenzahlen^{x)} im allgemeinen sehr schwierig. Wollte man alle Teilchen beobachten (exklusive Spektren), müßte man mit einer Unzahl von Parametern umgehen. Viel leichter zu handhaben sind inklusive Spektren. Zu ihrer Bestimmung genügt es, nur einige wenige

x) Am ISR im Mittel etwa 15 pro Ereignis.

Teilchen, die je nach der vorliegenden Fragestellung ausgewählt werden, wirklich auszumessen.

Solche einfachen, inklusiven Spektren sind:

- der totale, bzw. inelastische Wirkungsquerschnitt σ_{ab} , der im wesentlichen die Stärke der Wechselwirkung mißt,
- das 1-Teilchenspektrum $E \frac{d\sigma^c}{d^3p}$, das die Dichte des Teilchentyps c im Phasenraum ($\hbar = c = 1$) beschreibt und
- das 2-Teilchenspektrum $EE' \frac{d\sigma^{cd}}{d^3p d^3p'}$, das die Häufigkeit angibt, ein Teilchen der Sorte c mit einem Impuls p zu finden, falls ein Teilchen der Sorte d mit dem Impuls p' registriert worden ist.

Manche Argumentationen lassen sich sehr übersichtlich an Hand einer Graphendarstellung verfolgen, die aus der S-Matrix-Theorie[1] (Unitaritätsgraphen) bekannt ist. Die Hadron-Amplitude M_H für den Prozeß $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$ wird durch den Graphen

$$M_H \sim \begin{array}{c} a \longrightarrow \\ b \longrightarrow \end{array} \bigcirc \begin{array}{c} \longrightarrow 1 \\ \longrightarrow 2 \\ \vdots \\ \longrightarrow n \end{array} \quad (1.1)$$

beschrieben und der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{ab}^n \sim |M_H|^2$ durch

$$|M_H|^2 = M_H M_H^\dagger \sim \begin{array}{c} a \longrightarrow \\ b \longrightarrow \end{array} \bigcirc \begin{array}{c} \longrightarrow 1 \\ \longrightarrow \vdots \\ \longrightarrow n \end{array} \begin{array}{c} \longleftarrow a \\ \longleftarrow b \end{array}.$$

Die inklusiven Spektren entstehen daraus durch Integration über die Impulse aller nicht beobachteten Teilchen (X) und Summation über alle möglichen Kanäle. Nach dem sogenannten optischen Theorem[2] ist der totale Wirkungsquerschnitt σ_{ab} , bei dessen Bestimmung kein Sekundarteilchen individuell beobachtet wird (was wir mit $ab \rightarrow X$ andeuten wollen), proportional zum Imaginärteil oder, was äquivalent ist, zur Diskontinuität der Vorwärtsstreuamplitude für den elastischen Prozeß $ab \rightarrow ab$. In der Graphenschreibweise wird dieser Sachverhalt dargestellt als

$$\sigma_{ab} \sim \begin{array}{c} a \longrightarrow \\ b \longrightarrow \end{array} \bigcirc \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \bigcirc \begin{array}{c} \longleftarrow a \\ \longleftarrow b \end{array} \quad (1.2a)$$

Im Prinzip analoge, jedoch weitaus kompliziertere Theoreme existieren auch für die 1-, bzw. 2-Teilchenspektren[10]. Wir brauchen darauf nicht näher einzugehen, da wir nur die Graphen als Abkürzung für lange Formeln und Hilfe bei verschiedenen Argumentationen verwenden wollen, nämlich^{x)}

$$E \frac{d\sigma^c}{d^3p} \sim \text{Diagram} \quad (1.2b)$$

für das 1-Teilchenspektrum ($ab \rightarrow cX$) und

$$EE' \frac{d\sigma^{cd}}{d^3p d^3p'} \sim \text{Diagram} \quad (1.2c)$$

für das 2-Teilchenspektrum ($ab \rightarrow cdX$).

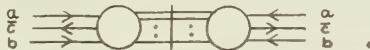
Das Integral über den Phasenraum eines inklusiven 1-Teilchenspektrums liefert offensichtlich die mittlere Multiplizität dieser Teilchensorte:

$$\int \left(E \frac{d\sigma^c}{d^3p} \right) \frac{d^3p}{E} = \langle n_c \rangle \cdot \sigma_{ab}. \quad (1.3)$$

2-Teilchenspektren liefern entsprechend höhere Momente:

$$\iint \left(EE' \frac{d\sigma^{cd}}{d^3p d^3p'} \right) \frac{d^3p}{E} \frac{d^3p'}{E'} = \langle n_c n_d - \delta_{cd} n_c \rangle \sigma_{ab}. \quad (1.4)$$

^{x)} Durch analytische Fortsetzung kommt man von (1.2b) zu



Es besteht also ein Zusammenhang zwischen dem inklusiven 1-Teilchenspektrum $E \frac{d\sigma^c}{d^3p}$ und der 3-Teilchen-Vorwärtsstreuamplitude für $a+b+\bar{c} \rightarrow a+b+\bar{c}$. Analoges gilt für (1.2c).

Um die Notation zu vereinfachen, normieren wir die Spektren auf $\sigma_{ab}^{(x)}$ und nennen sie dann Dichten:

$$\begin{aligned} g_c(p) &\equiv \frac{E}{\sigma_{ab}} \frac{d\sigma^c}{d^3p} \quad , \\ g_{cd}(p, p') &\equiv \frac{EE'}{\sigma_{ab}} \frac{d\sigma^{cd}}{d^3p d^3p'} \quad . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Das Phasenraumelement $\frac{d^3p}{E}$ werden wir oft durch $d\tau$ abkürzen.

Werden die Teilchen c und d unabhängig voneinander produziert, so gilt:

$$g_{cd}(p, p') = g_c(p) g_d(p')$$

und die Korrelationsfunktion:

$$\mathcal{C}_{cd}(p, p') = g_{cd}(p, p') - g_c(p) g_d(p') \quad (1.6)$$

verschwindet identisch. Das ist schon allein wegen verschiedener Erhaltungssätze, wie Energie-, Impuls- und Ladungserhaltung nicht möglich. Die Ladungserhaltung zum Beispiel erzwingt folgende Summenregeln:

$$\begin{aligned} (1) \quad s_a + s_b &= \sum_i s_i \langle n_i \rangle = \int (\sum_i s_i g_i(p)) d\tau \\ \text{oder}^{xx) \quad s_a + s_b &= \int (g_+(p) - g_-(p)) d\tau \quad . \end{aligned} \quad (1.7)$$

s_i ist das Ladungsvorzeichen des Teilchens i und $\sum_i s_i g_i(p)$ die Ladungsdichte im Phasenraum.

$$\begin{aligned} (2) \quad g_+(p) &= \int [\mathcal{C}_{+-}(p, p') - \mathcal{C}_{++}(p, p')] d\tau' \\ g_-(p) &= \int [\mathcal{C}_{-+}(p, p') - \mathcal{C}_{--}(p, p')] d\tau' . \end{aligned} \quad (1.8)$$

^{x)} In dieser Arbeit ist σ_{ab} der inelastische Wirkungsquerschnitt. In der Literatur wird teilweise auch auf den totalen Wirkungsquerschnitt (unter Einschluß des elastischen) normiert.

^{xx)} +, -, ch klassifiziert die Hadronen nur nach Ladungen: positiv, negativ oder einfach nur geladen.

Darüber hinaus muß man aber auch mit dynamischen Korrelationen rechnen, wie sie etwa zwischen den Zerfallsprodukten von Resonanzen, bzw. Clustern^{x)} bestehen.

1.2 In die Erforschung dieser inklusiven Spektren wurde eine Menge experimenteller und theoretischer Arbeit investiert. Die Ergebnisse sind in der Literatur ausführlich diskutiert ([11 bis 16] ist eine kleine Auswahl). Wir wollen hier nur einige ausgesuchte Daten präsentieren, um eine grobe Vorstellung von den Eigenschaften zu geben, die in der weiteren Diskussion eine Rolle spielen werden. Sie fallen verschieden stark ins Auge, je nachdem welche Variablen für die Darstellung gewählt werden. Wir werden meist die Rapidität

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_L}{E - p_L}$$

und den Transversalimpuls $\vec{p}_T$ verwenden. E und p_L sind Energie und Longitudinalimpuls, wobei transversal, bzw. longitudinal bezüglich der Strahlachse im Schwerpunktsystem der kollidierenden Hadronen a und b definiert ist. Für sehr schnelle Teilchen ($\frac{m^2}{p^2} \ll 1$) wird die Rapidität allein eine Funktion des Emissionswinkels θ (von der Strahlachse aus gemessen):

$$y \simeq -\ln \tan \frac{\theta}{2} ,$$

für Photonen gilt diese Relation exakt. Ein augenfälliger Vorteil der Rapidität ist ihr einfaches Verhalten unter longitudinalen Lorentztransformationen:

$$y \rightarrow y' = y + u \quad \text{mit} \quad u = \text{th}^{-1} \beta ,$$

wobei β die relative Geschwindigkeit der beiden Systeme ist. In dieser Parametrisierung ist der Viererimpuls eines Teilchens

$$p = (E, \vec{p}_T, p_L) = (m_T \cosh y, \vec{p}_T, m_T \sinh y). \quad (1.9)$$

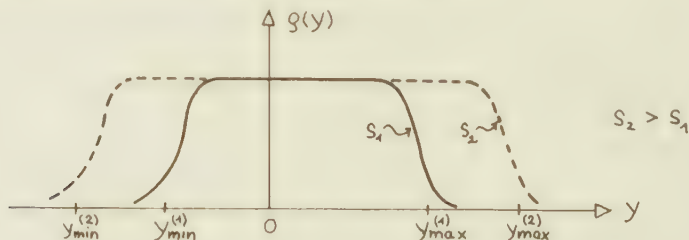
$m_T = \sqrt{m^2 + \vec{p}_T^2}$ bezeichnet man oft als transversale Energie.

^{x)} Cluster sind hadronische Objekte mit kontinuierlicher Massenverteilung.

Fast alle folgenden Daten stammen aus pp-Experimenten bei Laborenergien zwischen 12 und 1500 GeV^{x)}. Figur (1-1) zeigt verschiedene totale (A) und inelastische (B) Wirkungsquerschnitte. Wir entnehmen daraus später nur die Zahlen. Den Anstieg mit der Laborenergie sollte man bei der Diskussion von Energieabhängigkeiten im Gedächtnis behalten. In Figur (1-2) sind einige inklusive 1-Teilchenspektren als Funktion der Rapidität (A), bzw. des Transversalimpulses (B) dargestellt. Wir sehen folgende Grundzüge:

- (1) Die y -Verteilungen sind im Zentralgebiet flach und fallen anschließend zum Rand des kinematisch möglichen y -Intervalls rasch ab, mit Ausnahme des Protonspektrums, das dort ansteigt ("leading particle effect").
- (2) Die Pionen dominieren im Zentralgebiet.
- (3) Die Transversalimpulse sind beschränkt (etwa exponentieller Abfall $\sim e^{-ap_T}$): $\langle p_T \rangle \simeq 350 \text{ MeV/c}$, und zwar unabhängig von der Gesamtenergie.

Alle feineren Strukturen (z.B. breite Gaussverteilung statt Plateau, Anstieg von $\frac{d\sigma}{dy}(y=0)$ mit s^{xx}), langsamerer Abfall in p_T bei großen Transversalimpulsen ($p_T \gg 2 \text{ GeV/c}$) sind für die weiche Bremsstrahlung ohne - oder von mehr theoretischer - Bedeutung. In erster Näherung sind für uns, solange nur das Zentralgebiet wichtig ist, alle Sekundärhadronen Pionen mit kleinen Transversalimpulsen, die in der Rapidität gleichverteilt sind:



x) Entspricht Gesamtenergien im Schwerpunktsystem ($\sqrt{s} \simeq 2m_{p, \text{Lab}}$) von $5 \leq \sqrt{s} \leq 53 \text{ GeV}$.

xx) In den Dichten hebt sich ein Teil dieser s -Abhängigkeit wieder auf.

Als erheblich schwieriger erweist sich das Studium der Korrelationen. Prinzipiell können zwei Teilchen in allen ihren Variablen korreliert sein. Folglich hängt die Korrelationsfunktion (1.6) im allgemeinen von fünf Variablen ab: y, y', p_T, p'_T und $\phi^{xx)}$ (Azimuthalwinkel zwischen beiden Teilchen). Normalerweise wird jedoch über einen Teil der Variablen integriert. Man unterscheidet longitudinale Korrelationen, meist dargestellt als Rapiditätskorrelationen in der Form

$$R_{cd}(y, y') = \frac{\int \mathcal{C}_{cd}(y, y'; p_T, p'_T; \phi) d^2 p_T d^2 p'_T}{\int \mathcal{C}_c(y, p_T) d^2 p_T \cdot \int \mathcal{C}_d(y', p'_T) d^2 p'_T} \quad (1.10)$$

und transversale Korrelationen in p_T, p'_T und ϕ . Wenn wir nur die ϕ -Korrelationen meinen, sprechen wir von azimuthalen Korrelationen. Figur (1-3)A zeigt ein Höhenlinienprofil von $R_{cd}(y, y')$ in der (y, y') -Ebene für die Ladungskombinationen ++, --, +- und ch-ch bei $P_{Lab} = 400 \text{ GeV/c}$, B) die Energieabhängigkeit des höchsten Punktes: $R_{cd}(0,0)$. Auch hier wieder nur die für uns wesentlichen Punkte^{xx)}:

- (1) Es existieren positive Korrelationen im Zentralgebiet (kleine y und y') und negative Korrelationen am Rand des Phasenraums (Energie-Impuls-Erhaltung!).
- (2) Die positiven Korrelationen zwischen verschieden geladenen Teilchen sind stärker als zwischen gleichgeladenen Teilchen.
- (3) Ganz grob gesehen hängen die Korrelationen im Zentralgebiet nur von der Rapiditätsdifferenz $|\Delta y| = |y - y'|$ ab und verschwinden schnell, wenn $|\Delta y|$ wächst.
- (4) Sie sind nahezu unabhängig von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$.

$$x) \quad \phi = \cos^{-1} \frac{\vec{p}_T \cdot \vec{p}'_T}{p_T p'_T}.$$

xx) Wir können nicht auf die Modelle zur Erklärung dieser experimentellen Befunde eingehen, möchten aber doch darauf hinweisen, daß die Vorstellung einer unkorrelierten Produktion von Clustern, die dann in eine kleine Zahl von schließlich zu beobachtenden Hadronen zerfallen (z.B. $C \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$) die grundsätzliche Struktur dieser Korrelationen verstehen lassen.

Für verschiedene Argumentationen bei der Untersuchung der Bremsstrahlung wird vor allem die Eigenschaft (3) eine Rolle spielen. Azimutalkorrelationen werden in verschiedener Form untersucht, z.B. mit Hilfe des Asymmetrieparameters:

$$A_{\phi}^{cd} = \frac{N_{cd}(\pi/2 < \phi < \pi) - N_{cd}(0 < \phi < \pi/2)}{N_{cd}(\pi/2 < \phi < \pi) + N_{cd}(0 < \phi < \pi/2)} \quad (1.11)$$

N_{cd} ist die mittlere Zahl der Teilchenpaare cd in einem bestimmten ϕ -Intervall, in Abhängigkeit von $|\Delta y|$ und/oder $|\Delta p_T| = |p_T - p_T'|$ und/oder $|\Sigma p_T| = \frac{1}{2}(p_T + p_T')$, folgt also aus der inklusiven 2-Teilchendichte g_{cd} nach entsprechenden Integrationen. $A_{\phi}^{cd} = 0$ bedeutet, daß keine azimuthalen Korrelationen existieren. Die in Figur (1-4)A zusammengestellten experimentellen Resultate für gleich- bzw. verschieden geladene Pionpaare bei FNAL-Energien demonstrieren augenfällig:

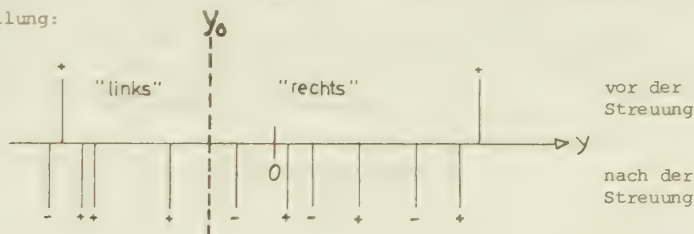
- (1) Es existieren Korrelationen für alle $|\Delta y|$ und alle $|\Delta p_T|$.
- (2) Sie sind schwach: $A_{\phi} < 0.1$.
- (3) Sie sind nur ladungsabhängig, wenn sowohl $|\Delta y|$ als auch $|\Delta p_T|$ klein ist: $|\Delta y| \lesssim 1$ und $|\Delta p_T| \lesssim 300 \text{ MeV/c}$.
- (4) Darüber hinaus scheint die Ladungsabhängigkeit auch auf kleine $|\Sigma p_T|$ beschränkt zu sein.

Die bei 102 GeV/c gemessene Verteilung des Azimutalwinkels ϕ $\frac{1}{\sigma_{\pi\pi}} \frac{d\sigma}{d\phi}$ in verschiedenen $|\Delta y|$ -Intervallen (Figur (1-4)B) bestätigt die Existenz azimuthaler Korrelationen, wenn die beiden Teilchen verschieden geladen sind (ganz klar für $|\Delta y| < 1$), läßt jedoch wenig Struktur für Teilchen mit gleicher Ladung erkennen. Wir legen deshalb soviel Gewicht auf die Ladungsabhängigkeit, weil die Bremsstrahlung nur den Unterschied von Korrelationen zwischen Hadronen gleicher und verschiedener Ladung fühlt. Korrelationen zwischen den Beträgen der Transversalimpulse p_T und p_T' spielen nur bei großen Transversalimpulsen eine wichtige Rolle. Da dort aber die Hadron-Dichten sehr gering sind, vernachlässigen wir diese Art von transversalen Korrelationen für unsere Bremsstrahlungsrechnung.

In der Einleitung erwähnten wir eine Abschätzung [3,4] des weichen Bremsstrahlungsspektrums, die auf einen engen Zusammenhang mit hadronischen Ladungskorrelationen - in Form des mittleren, quadratischen Ladungstransfers in der Rapidität $\langle \Delta^2 \rangle$ - führte. Wir wollen deshalb diesen Parameter etwas genauer diskutieren. Sei $\Delta(y_0)$ die Differenz der Gesamtladung nach der Streuung (Q_F) und der Gesamtladung vor der Streuung (Q_I) in der Hemisphäre links von y_0 :

$$\Delta(y_0) = Q_F(y < y_0) - Q_I(y < y_0). \quad (1.12)$$

Z.B. ist für $pp \rightarrow 6 \text{ pos. T.} + 4 \text{ neg. T.} + 1 \text{ neutr. T.}$ mit folgender Rapiditätsverteilung:



$$Q_F(y < y_0) = 2, Q_I(y < y_0) = 1 \text{ und daher } \Delta(y_0) = 1.$$

Den mittleren Ladungstransfer über die Rapidität y_0 : $\langle \Delta(y_0) \rangle$ erhält man einfach durch Mittelung von (1.12) über alle Ereignisse. Entsprechendes gilt für das mittlere Quadrat:

$$\langle \Delta^2(y_0) \rangle = \langle (Q_F(y < y_0) - Q_I(y < y_0))^2 \rangle \quad (1.13)$$

und die Dispersion:

$$D^2(y_0) = \langle \Delta^2(y_0) \rangle - \langle \Delta(y_0) \rangle^2 \quad (1.14)$$

dieser Größe. In späteren Rechnungen benötigen wir manchmal die Darstellung in 1-Teilchendichten, bzw. Korrelationsfunktionen^{x)}:

^{x)} Die transversalen Variablen denken wir uns bereits ausintegriert.

$$a) \quad \langle \Delta(y_0) \rangle = \int_{y_{\min}}^{y_0} (g_+(y) - g_-(y)) dy - Q_I(y < y_0) \quad (1.15)$$

und

$$b) \quad D^2(y_0) = \int_{y_{\min}}^{y_0} \int_{y_{\min}}^{y_0} [\mathcal{C}_{++} + \mathcal{C}_{--} - \mathcal{C}_{+-} - \mathcal{C}_{-+}] dy dy' + \langle n_{ch}(y_0) \rangle.$$

$\langle n_{ch}(y_0) \rangle$ ist die mittlere, geladene Multiplizität links von y_0 . $\langle \Delta^2(y_0) \rangle$, bzw. $D^2(y_0)$ mißt im wesentlichen die Stärke der Ladungsfluktuationen unter den Sekundärhadronen, die natürlich davon abhängt, wie die Hadronen produziert werden. Im Grenzfall exakter lokaler (in y) Ladungserhaltung im einzelnen Ereignis gibt es keinen Ladungstransfer:

$$\langle \Delta \rangle \equiv 0 \quad \text{und} \quad \langle \Delta^2 \rangle \equiv 0$$

Bei lokaler Ladungserhaltung im Mittel wäre zwar immer noch $\langle \Delta \rangle \equiv 0$, aber $\langle \Delta^2 \rangle > 0$. Aus den Daten könnte man bei hohen Energien eine derartige Tendenz herauslesen. Die Ladungsdichte $g_+(y) - g_-(y)$ für pp-Streuung zeigt z.B. ein zunehmendes Gleichgewicht zwischen positiven und negativen Teilchen im Zentralgebiet, wenn s wächst, während die beiden positiven Peaks, die sozusagen die Ladung der kollidierenden Protonen enthalten, mit diesen $\sim \ln s$ auseinander wandern (Figur (1-5)). In Figur (1-6) haben wir einige Daten für $\langle \Delta(y_0) \rangle$ und $\langle \Delta^2(y_0) \rangle$ bei verschiedenen Energien für einen symmetrischen (pp) und einen unsymmetrischen (K^-p) Anfangszustand zusammengestellt. Figur (1-7) zeigt die entsprechenden Dispersionen. Für später ist wichtig, daß $\langle \Delta^2(y_0) \rangle$ im gesamten Rapiditätsintervall nahezu konstant ist.

Die Ladungskorrelationen haben viel Interesse gefunden, weil sie sich besonders gut zur Untersuchung von Clusterbildung unter den Sekundärhadronen eignen. Insbesondere der Ladungstransfer wurde in verschiedenen Modellen für die Hadronproduktion diskutiert [21,23 bis 27]. Vergleicht man die Vorhersagen für die asymptotische Energieabhängigkeit von $\langle \Delta^2(0) \rangle$ mit den zur Verfügung stehenden Daten (Figur (1-8)), werden eigentlich nur das Fragmentationsmodell von Chou und Yang ([24]: $\langle \Delta^2(0) \rangle \sim \sqrt{s}$) und die unabhängige Produktion von Hadronen ([26]: $\langle \Delta^2(0) \rangle = \langle n_{ch} \rangle / 4$) mit Sicherheit eliminiert. Multiperiphere

Modelle [25] und Clustermodelle [27] liefern $\langle \Delta^2 \rangle \sim \text{const.}$ Die Daten sind sowohl mit einer asymptotischen Annäherung an einen konstanten Wert, als auch mit einem leichten logarithmischen Anstieg verträglich. Für eine verlässliche Entscheidung wären zumindest Daten bei ISR-Energien ($p_{\text{lab}} = 1500 \text{ GeV/c}$) nötig. Sie fehlen bis heute, da es am ISR viel schwieriger ist als in Blasenkammerexperimenten (z.B. FNAL), gleichzeitig die Ladungen zu identifizieren und den gesamten Phasenraum auszumessen. Beides ist aber zur Bestimmung von $\langle \Delta^2 \rangle$ notwendig. Das macht die erwähnte Relation zwischen dem Ladungstransfer und der weichen Bremsstrahlung zusätzlich interessant. Im Prinzip könnte man nämlich auf dem Umweg über ein "einfaches" Zählerexperiment zur Messung der Bremsstrahlung bei einem geeigneten Winkel $\langle \Delta^2 \rangle$ bestimmen. Ob man in Praxis aber die Bremsstrahlungskomponente von den Beiträgen der übrigen Photonquellen ($\pi^0, K^0, \eta, \dots$) separieren kann, ist sehr fraglich.

2. Weiche Bremsstrahlung in Hadronreaktionen

In der folgenden Diskussion wird die Näherung für weiche Photonen, so wie wir sie unserer Rechnung zugrundelegen werden, im Detail beschrieben. Dabei werden auch allgemeinere Fragen, wie Probleme der Störungsrechnung und Vielphotonemission berührt. Unser Ziel ist das inklusive 1-Photonspektrum in einer halbquantisierten Theorie mit einer klassischen Stromverteilung.

2.1 Formale Berechnung des Bremsstrahlungsspektrums

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{ab}^n$ für eine beliebige hadronische Reaktion:

$$a + b \longrightarrow 1 + 2 + \dots + n$$

mit der Amplitude

$$M_H(a+b \rightarrow 1+2+\dots+n) \sim \begin{array}{c} a \longrightarrow \\ b \longrightarrow \end{array} \bigcirc \begin{array}{c} \longrightarrow 1 \\ \longrightarrow \vdots \\ \longrightarrow i \\ \longrightarrow n \end{array} \quad (2.1)$$

ist gegeben durch [28]

$$d\sigma_{ab}^n = \frac{1}{4F} |M_H|^2 dLIPS(s; p_1, \dots, p_n). \quad (2.2)$$

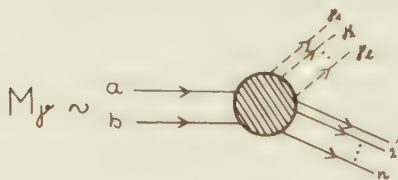
$p_a, p_b, p_1, \dots, p_n$ sind die Viererimpulse der Hadronen, $\sqrt{s} = \sqrt{(p_a + p_b)^2}$ ist die Schwerpunktsenergie, $F = ((p_a p_b)^2 - p_a^2 p_b^2)^{1/2}$ der invariante Flußfaktor und

$$dLIPS(s; p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{2(2\pi)^3 E_i} \quad (2.3)$$

das invariante Phasenraumelement^{x)}. Werden zusätzlich Photonen emittiert:

$$a + b \longrightarrow 1 + 2 + \dots + n + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_l,$$

sprechen wir von einem, dem hadronischen Grundprozeß $a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$ zugeordneten, radiativen Prozeß. Völlig analog zu (2.2) erhält man aus der radiativen Amplitude:



$$M_{\gamma} \sim \quad (2.4)$$

den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

x) Wir verwenden Dirac-Spinoren, die auf $2m$ statt auf 1 normiert sind, so daß Fermionen und Bosonen formal gleich behandelt werden können. $|M_H|^2$ enthalte bereits alle statistischen Faktoren für identische Teilchen im Endzustand. Außerdem denken wir uns über die Spins von a und b gemittelt und über die Spins der Sekundarteilchen summiert.

$$d\sigma_{ab}^{n,\ell} = \frac{1}{4F} |M_Y|^2 dLIPS(s; p_1, \dots, p_n; k_1, \dots, k_\ell) \quad (2.5)$$

$k_i = (\omega_i, \vec{k}_i)$ sind die Photonimpulse und

$$dLIPS(s; p_1, \dots, p_n; k_1, \dots, k_\ell) = (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_1^n p_i - \sum_1^\ell k_j) \cdot \prod_1^n \frac{d^3 p_i}{2(2\pi)^3 E_i} \prod_1^\ell \frac{d^3 k_j}{2(2\pi)^3 \omega_j} \quad (2.6)$$

ist das entsprechend erweiterte Phasenraumelement^{x)}. Nach der in Abschnitt II. 1.1 angegebenen Vorschrift findet man schließlich daraus formal für das inklusive Photonspektrum:

$$\omega \frac{d\sigma^Y}{d^3 k} = \frac{1}{2(2\pi)^3 4F} \int_\ell \int_n \ell \cdot |M_Y|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - \sum_1^n p_i - \sum_1^{\ell-1} k_j - k) \prod_1^n \frac{d^3 p_i}{2(2\pi)^3 E_i} \prod_1^{\ell-1} \frac{d^3 k_j}{2(2\pi)^3 \omega_j} \quad (2.7)$$

$\int_\ell$ symbolisiert die Integrationen über alle Hadronimpulse und die Summation über alle möglichen hadronischen Endzustände. $\int_n$ bedeutet dasselbe für die nichtbeobachteten Photonen. Wenn alle abgestrahlten Photonen sehr weich sind ($\omega_j \rightarrow 0$), faktorisiert $|M_Y|^2$ vollständig in die Amplitudenquadrate $T(k_j)$ für die Emission der einzelnen Photonen und $|M_H|^2$ für den

^{x)} Für (2.5) gelten dieselben Abmachungen wie für (2.2) (siehe Fußnote). Weiter enthalte $|M_Y|^2$ den statistischen Faktor $1/\ell!$ für die Photonen und auch die Summen über die Photonpolarisationen.

rein hadronischen Grundprozeß [29]:

$$|M_Y|^2 \sim \frac{1}{L!} T(k_1) \cdot T(k_2) \cdot \dots \cdot T(k_L) \cdot |M_H|^2. \quad (2.8)$$

Diese Faktorisierung wollen wir am Beispiel der Ein-Photon-Emission illustrieren.

2.2 Näherung für weiche Photonen

Von der Quantenelektrodynamik [1] her ist bekannt, daß die Amplitude für die Emission eines Photons wie $\frac{1}{\omega}$ ansteigt, wenn dessen Energie sehr klein wird (Infrarotproblem). Dasselbe gilt auch im Fall eines hadronischen Stromes. Man kann nun beweisen, daß diese Divergenz nur von dem Teil der zu M_Y (2.4) beitragenden Graphen kommt, wo das Photon von den äußeren, reellen Teilchen abgestrahlt wird:

$$M_Y^A \sim \begin{array}{c} \uparrow \gamma \\ a \\ \bullet \\ \hline b \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \vdots \\ n \end{array} + \dots + \begin{array}{c} a \\ \hline b \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \hline \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \gamma \\ \vdots \end{array} + \dots, \quad (2.9)$$

während die Amplitude

$$M_Y^I \sim \begin{array}{c} \uparrow \gamma \\ \bullet \\ \hline \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} a \\ \hline b \end{array} \text{---} \begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \\ \vdots \\ n \end{array}$$

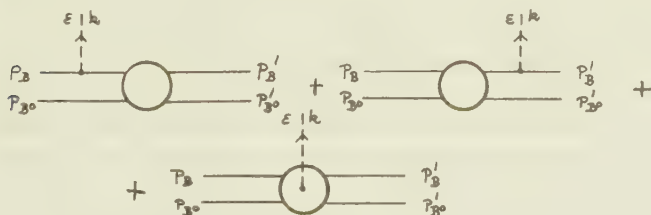
für die Kopplung des Photons an eine innere Linie endlich bleibt [30]. Im Limes $\omega \rightarrow 0$ dominiert also M_Y^A in der radiativen Amplitude:

$$M_Y = M_Y^A + M_Y^I. \quad (2.10)$$

Low [31] hat weiter gezeigt (sogenanntes Theorem für weiche Photonen), daß in der Entwicklung von M_{γ} nach ω :

$$M_{\gamma}(\omega) = \frac{a}{\omega} + b + O(\omega) \quad (2.11)$$

die Koeffizienten^{x)} a und b nur vom Grundprozeß abhängen, d.h. allein von der hadronischen Amplitude (2.1) bestimmt sind. Dieses Theorem folgt aus der Stromerhaltung. Für Photonenergien, bei denen man den in ω linearen Term vernachlässigen darf, faktorisiert also M_{γ} bereits in einem gewissen Sinne. Trotzdem reicht diese Näherung noch nicht aus, um das Photonspektrum ohne zusätzliche Annahmen über den Grundprozeß ausrechnen zu können. Warum, illustrieren wir an einem einfachen Beispiel [32], nämlich an der elastischen Streuung eines geladenen und eines neutralen Bosons. Zum radiativen Prozeß $BB^0 \rightarrow BB^0 \gamma$ tragen nur folgende Graphen bei:



(ϵ ist der Polarisationsvektor des Photons). Mit Hilfe der üblichen Feynman-Regeln [28] und des Low'schen Theorems erhält man:

$$M_{\gamma} \simeq e \left(\frac{\epsilon \cdot p_B'}{k \cdot p_B'} - \frac{\epsilon \cdot p_B}{k \cdot p_B} \right) M_{el} +$$

$$e \left(\frac{\epsilon \cdot p_B}{k \cdot p_B} k \cdot p_B' + \frac{\epsilon \cdot p_B}{k \cdot p_B} k \cdot p_{B^0} - \epsilon \cdot p_{B^0}' - \epsilon \cdot p_{B^0} \right) \frac{\partial M_{el}}{\partial \hat{s}}, \quad (2.12)$$

x) Zu a trägt nur M_{γ}^A bei; in b hebt sich der Beitrag von M_{γ}^T mit einem Teil des Beitrags von M_{γ}^A wegen der Stromerhaltung weg [32].

wobei e die Elementarladung und $\sqrt{s} = (p_1 \cdot p_2 + p'_1 \cdot p'_2)^{1/2}$ bis auf Massenterme die Schwerpunktsenergie des Grundprozesses mit der Amplitude M_{el} ist. Der Term der Ordnung ω^0 (b in (2.11)) wird also von der Energieableitung der hadronischen Amplitude bestimmt. Im Fall von Vielteilchenprozessen geht entsprechend die Abhängigkeit von den Subenergien $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ ein, über die man äußerst wenig weiß. Wir müssen folglich die Näherung verschärfen:

$$M_Y(\omega) \approx \frac{a}{\omega} \quad (2.13)$$

wenn wir nicht auf ein Hadron-Modell (z.B. Multi-Regge-Modell) zurückgreifen wollen. Analog zum ersten Term in (2.12) findet man für den infrarotdivergenten Beitrag von (2.9):

$$M_Y \approx e \left(\sum_{i=1}^n s_i \frac{\varepsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} - s_a \frac{\varepsilon \cdot p_a}{k \cdot p_a} - s_b \frac{\varepsilon \cdot p_b}{k \cdot p_b} \right) M_H \quad (2.14)$$

Da Spineffekte erst in den Termen höherer Ordnung in ω eine Rolle spielen^{xx)}, braucht man hier keinen Unterschied zwischen Fermionen und Bosonen zu machen.

Es stellt sich natürlich sofort die Frage nach dem Gültigkeitsbereich dieser Näherung. Für spezielle Grundprozesse, z.B. elastische Pion-Nukleon und Nukleon-Nukleon Streuung, existieren theoretische Untersuchungen [33-35] und auch experimentelle Tests [36], die auf einen überraschend weiten Gültigkeitsbereich schließen lassen. In [36] wurden die Low'sche Approximation ($M_Y \approx \frac{a}{\omega} + b$) und die reine Infrarot-Approximation ($M_Y \approx \frac{a}{\omega}$) für $\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p \gamma$ bei einer Laborenergie von 400 MeV getestet. Beide Näherungen stimmen für $\omega \lesssim 30$ MeV (im Laborsystem) gut mit den Daten überein. Die Infrarot-Approximation^{xxx)} be-

x) $s_i = 1, 0$ sind die Ladungsvorzeichen der Hadronen.

xx) b in (2.11) hängt von den magn. Momenten ab.

xxx) zusätzlich mit einem langsam variierenden Phasenraumfaktor.

schreibt die Daten sogar noch ganz zufriedenstellend bis $\omega \lesssim 100$ MeV. Ebenso ist die Annahme, bei der Emission von Photonen mit $\omega < m_\pi$ die Nukleonstruktur ignorieren zu können, mit den Daten für $NN \rightarrow NN\gamma$ bei niedrigen Nukleonenergien (~ 100 - 300 MeV) verträglich [34]. Für Prozesse mit mehr als zwei Hadronen gibt es, soweit wir wissen, bis jetzt keine entsprechenden Untersuchungen. Doch sehen wir kein Argument, weshalb der Gültigkeitsbereich kleiner sein sollte. Als eine notwendige Bedingung kann sicher $\frac{\omega}{E_H} \ll 1$ angesehen werden. Deshalb erscheint es uns vernünftig, unserer Näherung (2.14) bis zu Photonenergien von einigen hundert MeV im Schwerpunktsystem einer inelastischen Hadronreaktion bei hohen Energien (FNAL, ISR) zu trauen. Da die Infrarot-Approximation die Basis für unsere gesamte Arbeit darstellt, wollen wir sie noch in einem mehr feldtheoretischen Rahmen diskutieren. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Vielphotonemission.

2.3 Bremsstrahlung klassischer, nichtquantisierter Quellen; Vielphotonemission

Für die Emission genügend weicher Photonen spielen nur die klassischen Eigenschaften des elektromagnetischen Stromes eine Rolle, weil alle Rückstoßeffekte auf die Quellen vernachlässigt werden dürfen. Vom feldtheoretischen Standpunkt aus entspricht tatsächlich die im letzten Abschnitt beschriebene Näherung der Wechselwirkung eines quantisierten Photonfeldes mit einer nichtquantisierten Stromverteilung. In einer solchen Theorie kann die S-Matrix exakt berechnet werden, so daß man nicht auf eine Störungsentwicklung nach Potenzen von α angewiesen ist, die für langwellige Strahlung vollkommen versagt [1]. Der Grund liegt in der endlichen Energieauflösung ΔE jeder experimentellen Apparatur. Eine Analyse dieses Umstandes zeigt, daß nicht α , sondern $\alpha \ln \frac{\Delta E}{E}$ (E ist der maximale Energieverlust des strahlenden Teilchens) der relevante Entwicklungsparameter ist. Für $\frac{\Delta E}{E} \rightarrow 0$ wächst also die effektive Kopplungskonstante, so daß man immer mehr Entwicklungsterme mitnehmen muß. Mit anderen Worten, die Störungsrechnung wird ad absurdum geführt. Auch das sogenannte Infrarotproblem^{x)} hat seine Wurzeln in der Störungstheorie. Es ist bekannt, daß die Divergenz, die im Quadrat der Amplitude für die Emission reeller Photonen der Energie 0 auftritt, gerade durch die ebenfalls infrarot divergenten Beiträge der radiativen Korrekturen in jeder Ordnung von α eliminiert werden [1]. In einer nichtstörungstheoretischen Behandlung der Bremsstrahlung [37,38], in der der Effekt der weichen Photonen von vorneherein kollektiv behandelt wird, findet das Infrarot-Problem

^{x)} Abstrahlung unendlich vieler Photonen mit $\omega \sim 0$ bei der Beschleunigung einer Ladung.

eine einfache Lösung. Wenn keine Rückstöße effekte den e.m. Strom verändern, werden aufeinanderfolgende Photonen unter gleichen Bedingungen, d.h. unabhängig voneinander abgestrahlt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Emission von l Photonen faktorisiert dann in das l -fache Produkt der quadrierten Amplitude $T(k)$ für die Emission eines Photons und den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den Grundprozeß $d\sigma_0$ [29]^{x)}:

$$d\sigma_0^l = \frac{1}{l!} T(k_1) \cdot T(k_2) \cdots T(k_l) e^{-\bar{l}} \prod_{j=1}^l \frac{d^3 k_j}{2(2\pi)^3 \omega_j} d\sigma_0 \quad (2.16)$$

$\exp(-\bar{l})$ mit $\bar{l} = \int T(k) \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß überhaupt kein Photon emittiert wird. In der Sprache der Feynman-Graphen kommt dieser Faktor von den radiativen Korrekturen. Der unkorrelierten Produktion entsprechend sind die Multiplizitäten poissonartig um die mittlere Multiplizität $\bar{l} = \sum_0^\infty l P_0(l)$ verteilt:

$$P_0(l) = \frac{\bar{l}^l}{l!} e^{-\bar{l}} \quad (2.17)$$

Wegen $T(k) \sim \frac{1}{\omega^2}$ ist zwar die mittlere Anzahl der abgestrahlten Photonen $\bar{l}$ unendlich und folglich die Wahrscheinlichkeit für die Emission einer bestimmten, endlichen Zahl l von Photonen: $P_0(l) = 0$. Die Wahrscheinlichkeit eine unbestimmte Anzahl von Photonen abzustrahlen: $\sum_0^\infty P_0(l)$ ist aber endlich, z.B. 1, wenn man den ganzen Phasenraum zuläßt, oder $e^{-\bar{l}_\Delta}$ mit $\bar{l}_\Delta = \int_{\omega > \Delta} T(k) \frac{d^3 k}{2(2\pi)^3 \omega}$, wenn der Phasenraum auf $0 \leq \omega \leq \Delta$ beschränkt wird. Gemäß (2.7) erhalten wir schließlich aus (2.16) für das inklusive Photonspektrum:

x) In der δ -Funktion, die die Energie-Impuls-Erhaltung garantiert (siehe (2.7)) werden die Photonimpulse vernachlässigt.

$$\begin{aligned}
 \omega \frac{d\sigma^r}{d^3k} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \oint_{\ell} \oint_G \ell d\sigma_G^{\ell} \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_{\ell} \oint_G T(k) \frac{\bar{\ell}^{\ell-1}}{(\ell-1)!} e^{-\bar{\ell}} d\sigma_G \\
 &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \oint_G T(k) d\sigma_G.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.4 Das inklusive, weiche Bremsstrahlungsspektrum

Offensichtlich würde man (2.18) auch in der üblichen Störungstheorie 1. Ordnung in α erhalten, wenn man nur die Graphen (2.9) mitnimmt und alle radiativen Korrekturen wegläßt^{x)}. Diese formale Übereinstimmung vereinfacht später (in III.2) etwas die Diskussion. Der klassische Charakter der ganzen Näherung zeigt sich ganz deutlich in der Funktion $T(k)$, die nach einem Blick auf (2.14) sofort hingeschrieben werden kann:

$$T(k) = e^2 \sum_{\text{Pol}} \left(\sum_{i=1}^n S_i \frac{\varepsilon \cdot p_i}{k \cdot p_i} - S_a \frac{\varepsilon \cdot p_a}{k \cdot p_a} - S_b \frac{\varepsilon \cdot p_b}{k \cdot p_b} \right)^2. \tag{2.19}$$

$$j^{\mu}(k) = \sum_{i=1}^n S_i \frac{p_i^{\mu}}{k \cdot p_i} - S_a \frac{p_a^{\mu}}{k \cdot p_a} - S_b \frac{p_b^{\mu}}{k \cdot p_b}$$
 ist bis auf einen Zahlenfaktor nichts anderes als der Fourier-transformierte klassische Strom $j^{\mu}(x)$ für Punktladungen, die sich mit den Geschwindigkeiten $\vec{v} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\vec{p}_i}{E_i} & t \geq 0 \end{cases}$ auf den Flugbahnen $\vec{r}(t)$ bewegen:

x) Das zeigt, daß in der Störungsrechnung 1. Ordnung die mittlere Anzahl der Photonen in einem Phasenraumelement berechnet wird und nicht die Wahrscheinlichkeit, daß genau ein Photon mit dem Impuls k emittiert wird, die natürlich verschwindet.

$$j^\mu(x) \sim \sum_{i=1}^n s_i v_i^\mu(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i(t)) + \\ + s_a v_a^\mu(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_a(t)) + s_b v_b^\mu(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_b(t)) .$$

Folglich ist $T(k)$ selbst einfach die Intensitätsverteilung des klassischen Strahlungsfeldes^{x)}:

$$\frac{dI}{d^3k} \sim e^2 \left| \int j(x) e^{ikx} d^4x \right|^2 \\ \sim e^2 |j^\mu(k) j_\mu(k)| = T(k) \quad \text{xx)}$$

(2.20)

Um zum inklusiven Photonspektrum zu kommen, müssen wir noch über alle möglichen Ladungskonfigurationen, d.h. über den hadronischen Grundprozeß mitteln, was wieder auf (2.18) führt:

$$\omega \frac{d\sigma^Y}{d^3k} = \frac{e^2}{2(2\pi)^3} \oint_n (-j(k) \cdot j(k)) d\sigma_{ab} \\ = \frac{\alpha}{4\pi^2} \langle -j(k) \cdot j(k) \rangle \cdot \sigma_{ab} .$$

(2.21)

Das Ergebnis ist also äußerst simpel:

Der für $\omega \rightarrow 0$ führende Term des inklusiven Bremsstrahlungsspektrums in inelastischen Hadronreaktionen ist gegeben durch das Quadrat des Hadron-Stromes im klassischen Limes, gemittelt über alle Hadron-Konfigurationen.

x) Da das klassische Strahlungsfeld alle Photonenzahlen enthält, ist klar, daß $T(k)$ ein inklusives Photonspektrum beschreiben muß.

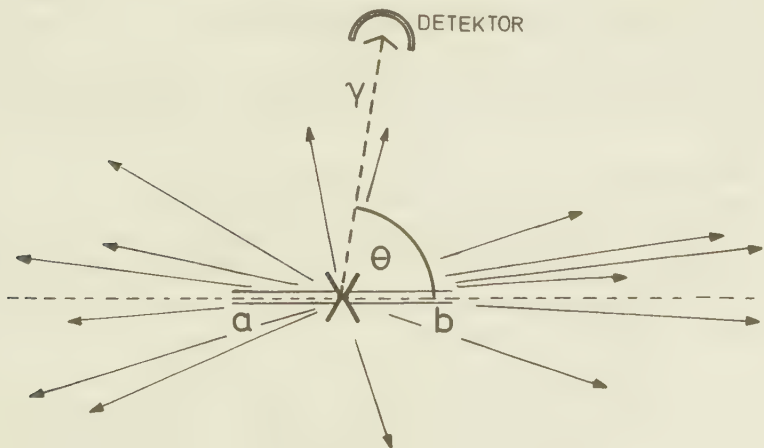
xx) In der Lorentzzeichnung ist $\sum \epsilon_\mu \epsilon_\nu = -g_{\mu\nu}$. $g_{\mu\nu}$ ist der metrische Tensor mit der Diagonale $(+1, -1, -1, -1)$.

III. Parametrisierung des weichen Bremsstrahlungsspektrums in inklusiven, hadronischen Größen

Wir wiederholen zunächst auf eine anschauliche Art und Weise die in der Einleitung erwähnte Abschätzung des Bremsstrahlungsspektrums und zeigen ihre kritischen Stellen. Dann wird eine exakte Summenregel [3] abgeleitet, die den Zusammenhang zwischen dem weichen Bremsstrahlungsspektrum und den inklusiven, hadronischen 1- und 2-Teilchenspektren herstellt. In dieser Summenregel separieren wir die dominanten Beiträge und schätzen den Rest mit Hilfe der in II.1 gesammelten, experimentellen Informationen ab.

1. Cahn's einfache, aber unrealistische Approximation zur Orientierung

1.1 Zwei Hadronen a und b stoßen zusammen und erzeugen einen ganzen Schwarm von Sekundärteilchen. Für die weiche Bremsstrahlung spielt nur die klassische Stromverteilung für die beteiligten Ladungen S_1 eine Rolle. Vom Experiment her wissen wir, daß bei hinreichend hoher Primärenergie im Schwerpunktsystem von a und b alle Hadronen relativistisch sind und bevorzugt in einen engen Doppelkegel um die Strahlachse fliegen:



Stellt man den Photodetektor unter einem Winkel θ zur Strahlachse auf, der groß ist gegen den Öffnungswinkel des Kegels, scheint es gerechtfertigt, letzteren ganz zu vernachlässigen und die wirkliche Hadronverteilung durch eine idealisierte zu ersetzen, in der alle Teilchen auf der Strahlachse liegen:

$$p_R = p(1, 0, 0, 1)$$

für nach rechts (parallel
zu a) fliegende Teilchen

(1.1)

$$p_L = p(1, 0, 0, -1)$$

für nach links (parallel
zu b) fliegende Teilchen

Das ist Cahn's Approximation [4]. In ihr setzt sich der elektromagnetische Strom

$$J(k) = \sum_{i=1}^n S_i \frac{p_i}{p_i \cdot k} - S_a \frac{p_a}{p_a \cdot k} - S_b \frac{p_b}{p_b \cdot k} \quad (1.2)$$

aus einer rechten Komponente mit der Nettoladung $Q_F^R - Q_I^R = \sum_{i \in R} S_i - S_a$ und der entsprechenden linken Komponente zusammen:

$$J(k) \simeq (Q_F^R - Q_I^R) \frac{p_R}{p_R \cdot k} + (Q_F^L - Q_I^L) \frac{p_L}{p_L \cdot k} \quad (1.3)$$

Wegen Ladungserhaltung in jedem einzelnen Ereignis:

$$Q_F^R + Q_F^L = Q_I^R + Q_I^L \quad (1.4)$$

kann man $Q_F^R - Q_I^R$ eliminieren:

$$J(k) \simeq (Q_F^L - Q_I^L) \left(\frac{p_L}{p_L \cdot k} - \frac{p_R}{p_R \cdot k} \right)$$

und findet, daß der e.m. Strom zum Ladungstransfer (siehe Definition II (1.12))

$$\Delta(0) = Q_F^L - Q_I^L \quad (1.5)$$

proportional ist:

$$J(k) \simeq \Delta(0) \left(\frac{p_L}{p_L \cdot k} - \frac{p_R}{p_R \cdot k} \right). \quad (1.6)$$

Mit

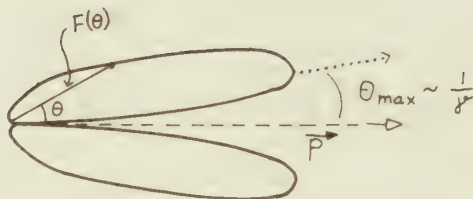
$$- \left(\frac{p_L}{p_L \cdot k} - \frac{p_R}{p_R \cdot k} \right)^2 = \frac{2 p_R \cdot p_L}{p_R \cdot k \ p_L \cdot k} = \frac{4}{k_T^2}$$

(siehe (1.1)) folgt aus II(2.21) für das Bremsstrahlungsspektrum:

$$\omega \frac{d\sigma^h}{d^3k} = \frac{\alpha}{\pi^2 k_T^2} \langle \Delta^2(0) \rangle G_{ab}. \quad (1.7)$$

Das ist der einfache Zusammenhang zwischen Bremsstrahlung und hadronischem Ladungstransfer, von dem in der Einleitung die Rede war. Man sieht sehr schön die Faktorisierung zwischen Photonemission und rein hadronischer Reaktion und den für weiche Photonen typischen Anstieg $\sim \frac{1}{k_T^2}$ zu kleinen Transversalimpulsen hin.

1.2 Bei etwas genauerem Hinsehen kommen jedoch Zweifel an dieser Approximation. Entscheidend für sie ist die Annahme, daß alle Hadronen unter einem großen Winkel am Photondetektor (bei $\theta \sim 90^\circ$) vorbeifliegen. Da relativistische Teilchen Photonen vor allem in Vorwärtsrichtung emittieren,



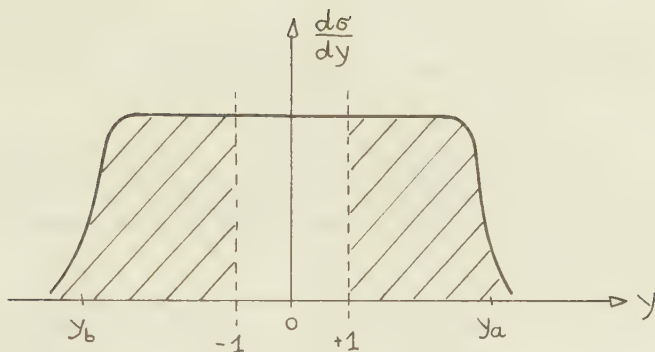
Winkelverteilung der Bremsstrahlung für eine bestimmte Frequenz ω bei der Beschleunigung einer Ladung aus der Ruhe auf die Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$. Die Intensität ist am größten ($\sim \gamma^2 = \frac{E^2}{m^2}$) bei $\theta_{\max} \sim 1/\gamma$.

ist der Beitrag eines einzelnen Hadrons klein. Alle zusammen erzeugen eine Photondichte $\sim \langle \Delta^2 \rangle$ im Detektor. Daß die Photonrate nicht einfach zur mittleren Multiplizität der geladenen Hadronen proportional ist, was man naiv erwarten würde, liegt an der Existenz von Ladungskorrelationen. In Wirklichkeit gibt es aber auch einige Hadronen, die direkt auf den Detektor zufliegen und deshalb einen großen Beitrag liefern. Er könnte möglicherweise mit $\langle \Delta^2 \rangle$ konkurrieren und darf deshalb nicht ohne weiteres unter den Tisch fallen. Das gilt auch asymptotisch für $s \rightarrow \infty$, falls $\langle \Delta^2 \rangle$ konstant bleibt. Der Cahn'schen Näherung entsprechen nämlich Hadronverteilungen, in denen wegen^{x)}:

$$\text{th } |y| = \frac{|\vec{p}_\perp|}{E} \simeq \frac{|\vec{p}|}{E} = \beta \simeq 1$$

das Gebiet um $y = 0$ nicht populiert ist:

^{x)} Formal werden die Transversalimpulse vernachlässigt, so daß $|\vec{p}_\perp| = |\vec{p}|$ ist.



Obwohl die Zahl der Hadronen im schraffierten Gebiet mit $\ln s$ wächst, bleibt ihr Beitrag zur Photonrate konstant, falls $\langle \Delta^2 \rangle$ konstant bleibt (siehe Fig. II(1-8)). Realistische Hadronspektren sind jedoch flach in der Rapidität. Wir erwarten also einen Beitrag R von Hadronen aus dem unschraffierten Gebiet um $y = 0$ ($\theta = 90^\circ$), der ebenfalls von der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ unabhängig und deshalb, wenn überhaupt, dann auch asymptotisch wichtig ist:

$$\omega \frac{d\sigma^r}{d^3k} = \frac{\alpha}{\pi^2 k_T^2} \cdot (\langle \Delta^2 \rangle + R) \cdot \sigma_{ab} \quad (1.8)$$

Da R von den Hadronen kommt, die in Richtung Detektor fliegen, wird dieser Beitrag im allgemeinen vom Photonwinkel θ , bzw. der Rapidität $\eta = -\ln \tan \frac{\theta}{2}$ abhängen. Damit ist der zweite Punkt angesprochen, an dem die Cahn'sche Näherung zu verbessern ist. (1.7) ist nicht explizit lorentzinvariant, da "rechts" und "links" in $\langle \Delta^2 \rangle$ als parallel bzw. antiparallel zum Hadron a im Schwerpunktsystem definiert ist und longitudinale Lorentzformationen ($y \rightarrow y' = y + u$) somit aus "rechts" "links" machen können. Für kleine Rapiditätsverschiebungen um $y \sim 0$, d.h. Winkeltransformationen um $\theta \sim 90^\circ$, ist die Cahn'sche Näherung wenigstens im Effekt invariant, da dieses Gebiet von Hadronen überhaupt nicht populiert ist. Eine wirklich invariante Definition für "rechts" und "links" darf jedoch nur Rapiditätsdifferenzen enthalten, so daß einzig:

$$\begin{aligned} \text{rechts:} \quad & y - \eta > 0, \\ \text{links:} \quad & y - \eta < 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

bleibt. Folglich muß in (1.8) $\langle \Delta^2(0) \rangle$ durch den mittleren, quadratischen Ladungstransfer über η ersetzt werden. Eine realistische Rechnung sollte also ein Bremsstrahlungsspektrum der Form:

$$\omega \frac{d\sigma^r}{d^3k} = \frac{\alpha}{\pi^2 k_T^2} \left(\langle \Delta^2(\eta) \rangle + R(\eta) \right) \cdot \sigma_{ab} \quad (1.10)$$

liefern. Die in den nächsten Abschnitten präsentierte Rechnung bestätigt dieses Ergebnis und bestimmt $R(\eta)$.

2. Summenregel für die weiche Bremsstrahlung

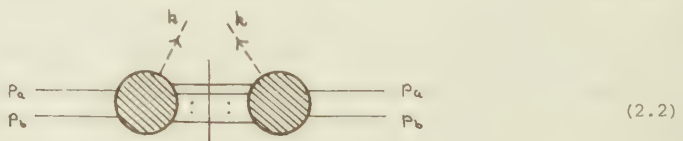
Wir gehen wieder zurück zur allgemeinen Formel II(2.21) für das weiche Photonspektrum:

$$\omega \frac{d\sigma^r}{d^3k} = \frac{\alpha}{4\pi^2} \oint_n (-j(k) j(k)) d\sigma_{ab}^n \quad (2.1)$$

mit dem elektromagnetischen Strom

$$j(k) = \sum_{i=1}^n S_i \frac{p_i}{p_i \cdot k} - S_a \frac{p_a}{p_a \cdot k} - S_b \frac{p_b}{p_b \cdot k}.$$

Sie läßt sich in einfacher und durchsichtiger Weise als Summenregel über inklusive Hadronspektren darstellen [3]. Um die Diskussion zu vereinfachen, verwenden wir die in II.1 eingeführten Unitaritätsgraphen. Danach wird das inklusive Photonspektrum durch den Graphen



beschrieben oder für weiche Photonen durch folgende Summe von Graphen
(II(2.9)) ^{x)}:

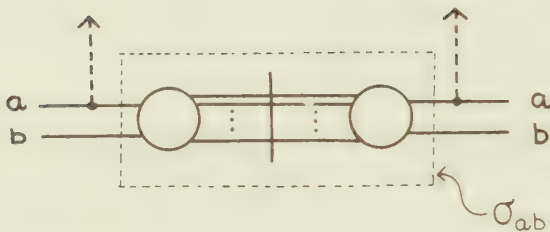
(2.3)

Die beiden ersten Reihen sind die quadratischen Beiträge zu (3.1)

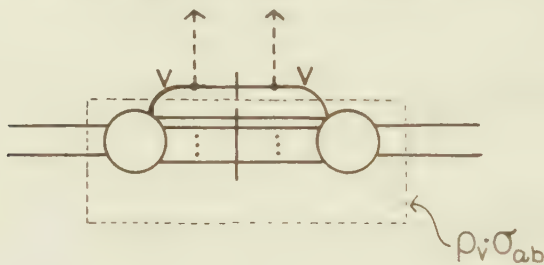
$$-\int_n \left(S_a^2 \frac{p_a^2}{(p_a \cdot k)^2} + S_b^2 \frac{p_b^2}{(p_b \cdot k)^2} + \sum_{i=1}^n S_i^2 \frac{p_i^2}{(p_i \cdot k)^2} \right) d\sigma_{ab}(p_1, \dots, p_n)$$

und hängen wegen der Faktorisierung von Photonemission und Hadronprozeß nur vom totalen hadronischen Wirkungsquerschnitt II(1.2a):

^{x)} Dabei nutzen wir die in II.2.4 erwähnte formale Übereinstimmung von (2.1) mit dem Resultat der Störungstheorie (1. Ordnung) aus.



oder von den inklusiven 1-Teilchendichten III.23a:



ab. Folglich liefert die Integration über den Grundprozeß:

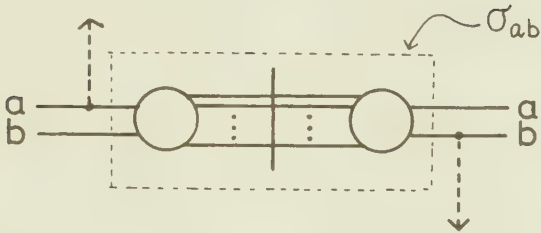
$$-\left(S_a^2 \frac{p_a^2}{(p_a \cdot k)^2} + S_b^2 \frac{p_b^2}{(p_b \cdot k)^2}\right) \cdot \sigma_{ab} - \sum_V S_V^2 \int \frac{p^2}{(p \cdot k)^2} g_V(p) \frac{d^3 p}{E} \cdot \sigma_{ab}$$

wobei v den Teilchentyp $(\pi^+, \pi^-, K^+, K^-, p, \bar{p}, \dots)$ bezeichnet.

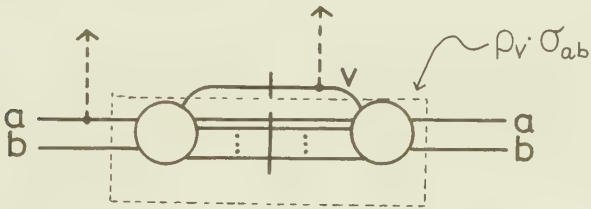
Die restlichen drei Reihen sind gemischte Terme, bei denen jeweils zwei verschiedene Hadronlinien im Spiel sind:

$$-\oint_n \left(2 S_a S_b \frac{p_a \cdot p_b}{(p_a \cdot k)(p_b \cdot k)} - 2 \sum_{i=1}^n \left(S_a S_i \frac{p_a \cdot p_i}{(p_a \cdot k)(p_i \cdot k)} + \right. \right. \\ \left. \left. + S_b S_i \frac{p_b \cdot p_i}{(p_b \cdot k)(p_i \cdot k)} \right) - \sum_{i \neq j}^n S_i S_j \frac{p_i \cdot p_j}{(p_i \cdot k)(p_j \cdot k)} \right) d\sigma_{ab}(p_1, \dots, p_n)$$

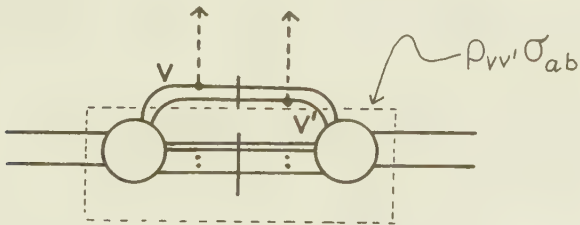
Der 1. Term enthält nur äußere Hadronimpulse:



ist also wieder proportional zu σ_{ab} , der 2. Term je Summand einen inneren Hadronimpuls:



und wird deshalb durch die 1-Teilchenspektren bestimmt. Analog kann der 3. Term:



durch 2-Teilchenspektren (II(1.2c)) dargestellt werden, so daß man diese gemischten Terme wie folgt schreiben kann:

$$\begin{aligned}
 & - 2 S_a S_b \frac{p_a \cdot p_b}{(p_a \cdot k)(p_b \cdot k)} \cdot \sigma_{ab} + \\
 & + 2 \sum_v S_v \int \left(S_a \frac{p_a \cdot p}{(p_a \cdot k)(p \cdot k)} + S_b \frac{p_b \cdot p}{(p_b \cdot k)(p \cdot k)} \right) g_v(p) \frac{d^3 p}{E} \cdot \sigma_{ab} - \\
 & - \sum_{v, v'} S_v S_{v'} \iint \frac{p \cdot p'}{(p \cdot k)(p' \cdot k)} g_{vv'}(p, p') \frac{d^3 p}{E} \frac{d^3 p'}{E'} \cdot \sigma_{ab} .
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man so für das inklusive Photonspektrum (2.1) folgende Summenregel:

$$\begin{aligned}
 \omega \frac{d\sigma^r}{d^3 k} = \frac{\alpha \cdot \sigma_{ab}}{4\pi^2} \left[F_0 + \sum_v S_v \int F_1 g_v \frac{d^3 p}{E} + \sum_v S_v^2 \int \hat{F}_1 g_v \frac{d^3 p}{E} + \right. \\
 \left. + \sum_{v, v'} S_v S_{v'} \iint F_2 g_{vv'} \frac{d^3 p}{E} \frac{d^3 p'}{E'} \right] ,
 \end{aligned}$$

worin

$$F_0 = - \left(S_a^2 \frac{m_a^2}{(p_a \cdot k)^2} + S_b^2 \frac{m_b^2}{(p_b \cdot k)^2} + 2 S_a S_b \frac{p_a \cdot p_b}{(p_a \cdot k)(p_b \cdot k)} \right) , \quad (2.4)$$

$$F_1 = 2 \left(S_a \frac{p_a \cdot p}{(p_a \cdot k)(p \cdot k)} + S_b \frac{p_b \cdot p}{(p_b \cdot k)(p \cdot k)} \right) ,$$

$$\hat{F}_1 = - \frac{m_v^2}{(p \cdot k)^2} ,$$

$$F_2 = - \frac{p \cdot p'}{(p \cdot k)(p' \cdot k)}$$

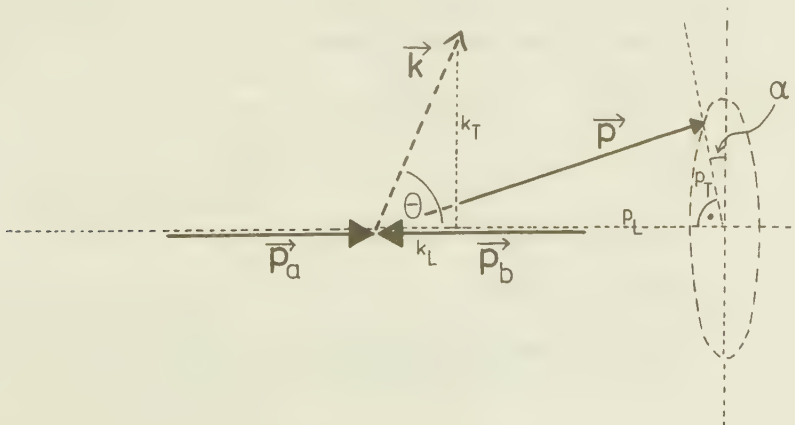
die Photonverteilungen bei vorgegebenen Hadronimpulsen sind. (m_V sind die jeweiligen Hadron-Massen.) Besonders hervorheben möchten wir den F_2 -Term, denn er testet die Korrelationen zwischen den Hadronen und verhindert, falls solche existieren, daß die Bremsstrahlung einfach proportional der mittleren geladenen Multiplizität ist.

3. Exakte Relation zwischen weicher Bremsstrahlung und mittlerem, quadratischen Ladungstransfer

3.1 Die weitere Auswertung der Summenregel (2.4) ist im wesentlichen eine Frage, wie man die Funktionen $F_0, \dots, F_2$ am geeignetsten darstellt. Folgende Gründe sprechen für eine Parametrisierung in Rapiditäten und Transversalimpulsen:

- (1) Wie in III.1.2 dargelegt, erwarten wir zusätzliche Beiträge zum Cahn'schen Ergebnis von den Hadronen mit großen Winkeln zur Strahlachse. Dieser kinematische Bereich wird in Rapiditätsverteilungen besonders hervorgehoben.
- (2) Das Verhalten unter longitudinalen Lorentz-Transformationen ist an Rapiditätsverteilungen leicht abzulesen, da Differenzen von Rapiditäten invariant sind.
- (3) Die numerische Auswertung wird durch die einfache Form der hadronischen Rapiditätsverteilungen stark erleichtert.

Im Schwerpunktsystem der einlaufenden Hadronen a und b



lassen sich die Impulse der beteiligten Teilchen nach II 1.9, wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 p_a &= (E_a, 0, 0, p_a) = m_a (\text{ch } y_a, 0, 0, \text{sh } y_a) \\
 p_b &= (E_b, 0, 0, p_b) = m_b (\text{ch } y_b, 0, 0, \text{sh } y_b) \\
 p &= (E, p_T \cos \alpha, p_T \sin \alpha, p_L) \\
 &= m_T \left(\text{ch } y, \frac{p_T}{m_T} \cos \alpha, \frac{p_T}{m_T} \sin \alpha, \text{sh } y \right) \\
 k &= (\omega, k_T, 0, k_L) = k_T (\text{ch } \eta, 1, 0, \text{sh } \eta).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dabei wird der Azimuthalwinkel α von der Ebene aus gemessen, die die Strahlachse und das Photon enthält. Die invarianten Phasenraumelemente d^3p/E und d^3k/ω transformieren sich zu

$$\frac{d^3p}{E} = dy d^2p_T, \quad \frac{d^3k}{\omega} = d\eta d^2k_T \tag{3.2}$$

und für die in den Funktionen F der Summenregel (2.4) vorkommenden inneren Produkte der Impulse bekommt man:

$$\begin{aligned}
 p_a \cdot p_b &= m_a m_b \text{ch}(y_a - y_b) \\
 p_a \cdot p &= m_a m_T \text{ch}(y_a - y) \\
 p_b \cdot p &= m_b m_T \text{ch}(y_b - y) \\
 p \cdot p' &= m_T m'_T \left(\text{ch}(y - y') - \frac{p_T}{m_T} \frac{p'_T}{m'_T} \cos(\alpha - \alpha') \right) \\
 p_a \cdot k &= m_a k_T \text{ch}(y_a - \eta) \\
 p_b \cdot k &= m_b k_T \text{ch}(y_b - \eta) \\
 p \cdot k &= m_T k_T \left(\text{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_T} \cos \alpha \right).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nach einigen algebraischen Umformungen finden wir:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= - \frac{1}{k_T^2} \left[(s_a + s_b)^2 - (s_a \operatorname{th}(y_a - \eta) + s_b \operatorname{th}(y_b - \eta))^2 \right] \\
 F_1 &= \frac{2}{k_T^2} \left[(s_a + s_b) \frac{\operatorname{ch}(y - \eta)}{\operatorname{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{vT}} \cos \alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - (s_a \operatorname{th}(y_a - \eta) + s_b \operatorname{th}(y_b - \eta)) \frac{\operatorname{sh}(y - \eta)}{\operatorname{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{vT}} \cos \alpha} \right] \\
 \hat{F}_1 &= - \frac{1}{k_T^2} \left[\frac{\frac{m_v}{m_{vT}}}{\operatorname{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{vT}} \cos \alpha} \right]^2 \\
 F_2 &= - \frac{1}{k_T^2} \left[\frac{\operatorname{ch}(y - y') - \frac{p_T}{m_{vT}} \frac{p_T'}{m_{vT}'} \cos(\alpha - \alpha')}{(\operatorname{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{vT}} \cos \alpha)(\operatorname{ch}(y' - \eta) - \frac{p_T'}{m_{vT}'} \cos \alpha')} \right] .
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Das Ergebnis in der Cahn'schen Näherung läßt sich sofort reproduzieren, wenn wir alle hadronischen Transversalimpulse gleich Null setzen und die Abstände $|y - \eta|$ in der Rapidität zwischen Photon und Hadronen groß werden lassen^{x)}. Die Funktionen F (3.4) vereinfachen sich dann zu:

^{x)} Groß heißt: $\operatorname{th}(|y - \eta|) \simeq 1$.

η liege im Zentralgebiet (das bedeutet große Winkel θ), so daß auch $\operatorname{th}(y_a - \eta) \simeq 1$ und $\operatorname{th}(y_b - \eta) \simeq -1$.

$$F_0^G = - \frac{4 s_a s_b}{k_T^2}$$

$$F_1^G = \frac{2}{k_T^2} \left[(s_a + s_b - (s_a - s_b) \varepsilon(y - \eta)) \right]$$

(3.5)

$$\hat{F}_1^G = 0$$

$$F_2^G = - \frac{1}{k_T^2} \left[1 - \varepsilon(y - \eta) \varepsilon(y' - \eta) \right]$$

wobei

$$\varepsilon(y - \eta) = \begin{cases} +1 & \text{für } y > \eta \\ -1 & \text{für } y < \eta \end{cases} \quad (3.6)$$

"rechts" (R) und "links" (L) definiert (siehe (1.9)). In dieser Näherung können wir alle Integrationen in der Summenregel (2.4) ausführen und finden:

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\sigma^Y}{d^3k} &= \frac{\alpha \cdot G_{ab}}{4\pi^2 k_T^2} \left[-4 s_a s_b + 4 s_b \sum_V s_V \langle n_V^R \rangle + 4 s_a \sum_V s_V \langle n_V^L \rangle - \right. \\ &\quad \left. - 4 \sum_{V, V'} s_V s_{V'} \langle n_V^R n_{V'}^L \rangle \right] \\ &= \frac{\alpha \cdot G_{ab}}{\pi^2 k_T^2} \left[- \left\langle \left(\sum_V s_V n_V^R - s_a \right) \left(\sum_V s_V n_V^L - s_b \right) \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Dabei wurden die auf Teilgebiete des Phasenraums verallgemeinerten Definitionen II(1.3 und 1.4) folgender Momente:

$$\int_{y>\eta} g_v(p) dy d^2 p_T = \langle n_v^R \rangle, \quad \int_{y<\eta} g_v(p) dy d^2 p_T = \langle n_v^L \rangle$$

und

(3.7)

$$\iint_{\substack{y>\eta \\ y'<\eta}} g_{vv'}(p, p') dy dy' d^2 p_T d^2 p'_T = \langle n_v^R n_{v'}^L \rangle$$

benutzt. Da die Gesamtladung in jedem einzelnen Ereignis erhalten ist, kann $\sum_v s_v n_v^R - s_a$ durch $-(\sum_v s_v n_v^L - s_b)$ ersetzt werden. $\langle (\sum_v s_v n_v^L - s_b)^2 \rangle$ ist aber gerade $\langle \Delta^2(\eta) \rangle$ (II(1.13)), was schließlich auf die kovariante Form des Cahn'schen Ergebnisses führt:

$$\omega \frac{d\sigma^R}{d^3 k} = \frac{\alpha \cdot \sigma_{ab}}{\pi^2 k_T^2} \langle \Delta^2(\eta) \rangle.$$

Isolieren wir diesen Term in der exakten Summenregel (2.4), so finden wir das in (1.10) aus einer einfachen Überlegung abgeleitete Ergebnis:

$$\omega \frac{d\sigma^R}{d^3 k} = \frac{\alpha \cdot \sigma_{ab}}{\pi^2 k_T^2} \left(\langle \Delta^2(\eta) \rangle + R(\eta) \right). \quad (3.8)$$

Aus (3.4) und (3.5) kann $R(\eta)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} R(\eta) = \frac{1}{4} & \left[(F_0 - F_0^C) + \sum_v s_v \int (F_1 - F_1^C) g_v \frac{d^3 p}{E} + \right. \\ & + \sum_v s_v^2 \int (\hat{F}_1 - \hat{F}_1^C) g_v \frac{d^3 p}{E} + \\ & \left. + \sum_{v, v'} s_v s_{v'} \iint (F_2 - F_2^C) g_{vv'} \frac{d^3 p}{E} \frac{d^3 p'}{E'} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Obwohl diese Formel recht kompliziert aussieht, läßt sie sich doch relativ einfach abschätzen, da die neuen Funktionen $F - F^d$ nach Konstruktion nur für kleine Differenzen von Hadron- und Photon-Rapiditäten von Null verschieden sind^{x)}. Wir subtrahieren (3.5) von (3.4) und erhalten:

$$F_0 - F_0^d = (s_a \text{th}(y_a - \eta) + s_b \text{th}(y_b - \eta))^2 - (s_a - s_b)^2 \quad (3.10)$$

$$F_1 - F_1^d = 2 \left[(s_a + s_b) \left(\frac{\text{ch}(y - \eta)}{\text{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{VT}} \cos \alpha} - 1 \right) + \right. \\ \left. + (s_a - s_b) \varepsilon(y - \eta) - \right. \\ \left. - (s_a \text{th}(y_a - \eta) + s_b \text{th}(y_b - \eta)) \frac{\text{sh}(y - \eta)}{\text{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{VT}} \cos \alpha} \right]$$

$$\hat{F}_1 - \hat{F}_1^d = - \left[\frac{\frac{m_V}{m_{VT}}}{\text{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{VT}} \cos \alpha} \right]^2$$

$$F_2 - F_2^d = 1 - \varepsilon(y - \eta) \varepsilon(y' - \eta) - \frac{\text{ch}(y - y') - \frac{p_T}{m_{VT}} \frac{p_T'}{m_{VT}'} \cos(\alpha - \alpha')}{(\text{ch}(y - \eta) - \frac{p_T}{m_{VT}} \cos \alpha)(\text{ch}(y' - \eta) - \frac{p_T'}{m_{VT}'} \cos \alpha')}.$$

3.2 Bevor wir dieses Resultat numerisch auswerten, möchten wir die Bremsstrahlung in Vorwärtsrichtung ($\theta = 0^\circ$) untersuchen. Für diesen interessanten Fall gilt die Cahn'sche Näherung überhaupt nicht. $\theta = 0^\circ$ bedeutet $\eta = \infty$ (siehe II.1), so daß in (3.4) ein sorgfältiger Grenzübergang notwendig wäre, da sowohl $\langle \Delta(\eta) \rangle$ und $R(\eta)$, als auch k_T^2 für $\eta \rightarrow \infty$ verschwinden. Statt dessen ist es einfacher, von der ursprünglichen Summenregel (2.4) auszugehen. Da das Photon jetzt parallel zum Teilchen a emittiert wird, ist für einen beliebigen

^{x)} $R(\eta)$ ist eben der Beitrag von den Hadronen, die in Richtung des Photondetektors fliegen.

Hadronimpuls p:

$$\begin{aligned} p \cdot k &= \omega (E - p_L) \\ &= \omega m_T (\cosh y - \sinh y) \\ &= \omega m_T e^{-y}. \end{aligned}$$

Dementsprechend erhält man für die Funktionen F:

$$F_0 = - \frac{1}{\omega^2} \left[s_a^2 e^{2y_a} + s_b^2 e^{2y_b} + 2 s_a s_b \cosh(y_a - y_b) e^{y_a + y_b} \right]$$

$$= - \frac{1}{\omega^2} (s_a + s_b) \left(s_a e^{2y_a} + s_b e^{2y_b} \right)$$

$$F_1 = \frac{2}{\omega^2} \left[s_a e^{y_a + y} \cosh(y_a - y) + s_b e^{y_b + y} \cosh(y_b - y) \right]$$

$$= \frac{1}{\omega^2} \left[(s_a e^{2y_a} + s_b e^{2y_b}) + (s_a + s_b) e^{2y} \right]$$

$$\hat{F}_1 = - \frac{1}{\omega^2} \frac{m_V^2}{m_{VT}^2} e^{2y} \quad (3.11)$$

$$F_2 = - \frac{1}{\omega^2} \left(\cosh(y - y') - \frac{\vec{p}_T \vec{p}'_T}{m_{VT} m'_{VT}} \right) e^{y + y'}$$

$$= - \frac{1}{\omega^2} \left[\frac{1}{2} e^{2y} + \frac{1}{2} e^{2y'} - \frac{\vec{p}_T \vec{p}'_T}{m_{VT} m'_{VT}} e^{y + y'} \right].$$

In diesem Fall führen die Ladungssummenregeln II(1.8), die man auch in folgender Form schreiben kann:

$$-\sum_{\nu} S_{\nu}^2 g_{\nu}(p) = \sum_{\nu, \nu'} S_{\nu} S_{\nu'} \int \mathcal{C}_{\nu\nu'}(p, p') \frac{d^3 p'}{E'} \quad (3.12)$$

zu einer wesentlichen Vereinfachung der Formel für das Photonspektrum:

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3 k} \Big|_{\theta=0^{\circ}} &= \frac{\alpha \cdot G_{ab}}{4\pi^2 \omega^2} \left[(S_a e^{2y_a} + S_b e^{2y_b}) \left(\sum_{\nu} S_{\nu} \int g_{\nu} \frac{d^3 p}{E} - (S_a + S_b) \right) + \right. \\ &\quad + (S_a + S_b) \sum_{\nu} S_{\nu} \int e^{2y} g_{\nu} \frac{d^3 p}{E} - \\ &\quad - \sum_{\nu} S_{\nu}^2 \int \frac{m_{\nu}^2}{m_{\nu T}^2} e^{2y} g_{\nu} \frac{d^3 p}{E} + \\ &\quad + \sum_{\nu} S_{\nu}^2 \int e^{2y} g_{\nu} \frac{d^3 p}{E} + \\ &\quad \left. + \sum_{\nu, \nu'} S_{\nu} S_{\nu'} \iint \frac{\vec{p}_T \vec{p}_T'}{m_{\nu T} m_{\nu' T}} e^{y+y'} g_{\nu\nu'} \frac{d^3 p}{E} \frac{d^3 p'}{E'} \right] \end{aligned}$$

und mit $\sum_{\nu} S_{\nu} \int g_{\nu} \frac{d^3 p}{E} = S_a + S_b$

schließlich zu:

$$\begin{aligned} \omega \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3 k} \Big|_{\theta=0^{\circ}} &= \frac{\alpha \cdot G_{ab}}{4\pi^2 \omega^2} \left[\sum_{\nu} S_{\nu}^2 \int \frac{p_T^2}{m_{\nu T}^2} e^{2y} g_{\nu} \frac{d^3 p}{E} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu, \nu'} S_{\nu} S_{\nu'} \iint \frac{\vec{p}_T \vec{p}_T'}{m_{\nu T} m_{\nu' T}} e^{y+y'} g_{\nu\nu'} \frac{d^3 p}{E} \frac{d^3 p'}{E'} \right]. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Die Photonen mit sehr kleinen Winkeln zur Strahlachse fühlen also nichts mehr von den hadronischen Ladungsfluktuationen in der Rapidity. Vielmehr besteht das Spektrum aus einer inkohärenten Komponente (1. Term), zu der jedes Hadron mit $\frac{p_T^2}{m_T^2} e^{2y}$ beiträgt, und einem Interferenzterm, der von den azimuthalen Korrelationen zwischen den Hadronen verursacht wird und wegen $\vec{p}_T \vec{p}_T' \sim \cos \phi$ bei Gleichverteilung in ϕ (Asymmetrieparameter $A_\phi = 0$, II(1.11)) verschwindet. Wir werden in III.5 zeigen, daß der Hauptbetrag vom 1. Term in (3.13) kommt. Man überzeugt sich leicht, daß der Wert des Integrals

$$\int \frac{p_T^2}{m_T^2} e^{2y} g(y, p_T) dy d^2 p_T \sim \int e^{2y} g(y) dy$$

linear in s ansteigt. Wegen $g(y) \sim \text{const}$ (siehe II.1) ist nämlich

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} e^{2y} g(y) dy \sim e^{2y_{\max}} - e^{2y_{\min}},$$

wobei $y_{\max}$ ($y_{\min}$) die größte (kleinste), kinematisch mögliche Rapidity bei festem Transversalimpuls ist:

$$y_{\max} = -y_{\min} = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{m_T^2}. \quad (3.14)$$

In diesem Anstieg mit s spiegelt sich die Tatsache wider, daß in Vorwärtsrichtung die Intensität der Strahlung für eine feste Frequenz ω proportional zu

$$j^2 = \frac{E^2}{m^2} \quad (E(m) = \text{Energie (Masse) des strahlenden Teilchens}) \text{ ist:}$$

$$j^2 = \frac{E^2}{m^2} = \frac{m_T^2}{m^2} d^2 y \rightarrow \sim e^{2y}.$$

Exakt parallel zur Flugrichtung einer Ladung hat man wegen der transversalen Polarisation der Photonen überhaupt keine Bremsstrahlung. Aus diesem Grund verschwindet auch (3.13) für $p_T \equiv 0$. Das zeigt, daß die Cahn'sche Approximation für $\theta = 0^\circ$ ihren Sinn verliert. Die oben festgestellte s -Abhängigkeit erscheint explizit, wenn man anstelle der Rapidity die Feynman-Variable $x_H = \frac{2p_L}{\sqrt{s}}$ ($-1 \leq x_H \leq 1$) für die Hadronen, bzw. $x = \frac{2k_L}{\sqrt{s}}$ für das Photon verwendet.

Zwischen x_H und y besteht folgender Zusammenhang:

$$x_H = e^{-\left(\frac{1}{2}(y_{\max} - y_{\min}) - y\right)} - e^{-\left(\frac{1}{2}(y_{\max} - y_{\min}) + y\right)} \quad (3.15)$$

oder mit (3.14):

$$e^{2y} + e^{-2y} = \frac{S}{m_T^2} x_H^2 + 2$$

Für 1-Teilchendichten, die symmetrisch in y bezüglich $y = 0$ sind^{x)}, gilt ($y_{\max} = -y_{\min} = Y$):

$$\begin{aligned} \int_{-Y}^Y e^{2y} \frac{p_T^2}{m_T^2} g(y, p_T) dy d^2 p_T &= \int_0^Y (e^{2y} + e^{-2y}) \frac{p_T^2}{m_T^2} g(y, p_T) dy d^2 p_T \\ &= S \cdot \int_0^1 x_H^2 \frac{p_T^2}{m_T^4} g(x_H, p_T) \frac{dx_H}{\sqrt{x_H^2 + \frac{4m_T^2}{S}}} d^2 p_T + \\ &\quad + 2 \int_0^1 \frac{p_T^2}{m_T^2} g(x_H, p_T) \frac{dx_H}{\sqrt{x_H^2 + \frac{4m_T^2}{S}}} d^2 p_T \\ &= \frac{S}{2} \int x_H^2 \frac{p_T^2}{m_T^4} g(p) \frac{d^3 p}{E} + \left\langle \frac{p_T^2}{m_T^2} \right\rangle \langle n \rangle \end{aligned}$$

^{x)} Das ist für identische Primärhadronen, also z.B. bei pp-Streuung der Fall.

Zusammengefaßt finden wir also für das Photonspektrum bei $\theta = 0^\circ$:

$$\omega \frac{d\sigma^r}{d^3k} \Big|_{\theta=0^\circ} = \frac{\alpha G_{ab}}{\pi^2 x^2} \left(\frac{1}{2} \sum_V S_V^2 \int X_H^2 \frac{p_T^2}{m_{VT}^4} S_V(p) \frac{d^3p}{E} + R_0 \right) \quad (3.16)$$

mit x^2

$$R_0 = \frac{1}{S} \left(\sum_V S_V^2 \langle \frac{p_T^2}{m_{VT}^2} \rangle \langle n_V \rangle + \sum_{V,V'} S_V S_{V'} \iint \frac{\vec{p}_T \vec{p}'_T}{m_{VT} m'_{VT}} e^{y+y'} \mathcal{C}_{V,V'}(p,p') \frac{d^3p}{E} \frac{d^3p'}{E'} \right).$$

An Hand der in diesem Abschnitt abgeleiteten Ergebnisse werden nun zunächst die Eigenschaften des weichen Bremsstrahlungsspektrums diskutiert.

4. Diskussion der Eigenschaften des Photonspektrums

4.1 Wir beginnen mit der Bremsstrahlung bei großen Winkeln im Schwerpunktsystem. Die Terme in der Summenregel (3.8), die von den hadronischen Einteilchenspektren abhängen, machen wenig Mühe, weil diese Hadronspektren eine sehr einfache Gestalt haben. Dagegen erfordern die Terme, in die Korrelationen zwischen den Hadronen eingehen, mehr Aufwand. Es ist deshalb vorteilhaft, letztere mit Hilfe der Relation

$$S_{VV'} = S_V S_{V'} + \mathcal{C}_{VV'}$$

zu isolieren. Nach langwierigen, aber ansonsten trivialen algebraischen Umformungen, wobei wieder die Ladungssummenregel (3.12) und die Rotationssymmetrie der Einteilchenspektren um die Strahlachse ausgenützt werden, erhält man für den Restterm $R(\eta)$ (3.9,10):

^{x.)} Da die 1-Teilchenspektren um die Strahlachse rotationssymmetrisch sind, liefern sie zum 2. Term in R_0 keinen Beitrag, so daß $S_{VV'}$ durch $\mathcal{C}_{VV'}$ ersetzt werden kann.

$$\begin{aligned}
 R(\eta) = \frac{1}{4} \bigg[& \left(b - (s_a - s_b) + 2 \langle \Delta(\eta) \rangle - \sum_v s_v \int (f - \epsilon) s_v \frac{d^3 p}{E} \right)^2 - \\
 & - 4 \langle \Delta(\eta) \rangle^2 + \sum_v s_v^2 \int g s_v \frac{d^3 p}{E} + \\
 & + \sum_{v, v'} s_v s_{v'} \iint h \mathcal{C}_{vv'} \frac{d^3 p}{E} \frac{d^3 p'}{E'} \bigg]. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Die Funktionen b , f , g , ϵ und h sind wie folgt definiert:

$$b = s_a \operatorname{th}(y_a - \eta) + s_b \operatorname{th}(y_b - \eta)$$

$$f = \frac{\operatorname{sh}(y - \eta)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(y - \eta) - \frac{p_T^2}{m_T^2}}}$$

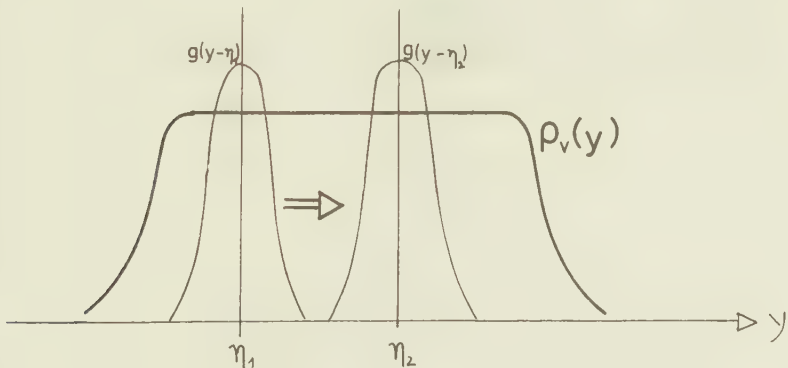
$$\begin{aligned}
 g = & \frac{2 \operatorname{ch}(y - \eta)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(y - \eta) - \frac{p_T^2}{m_T^2}}} - 2 - \\
 & - \frac{\frac{m_T^2}{m_T^2} \operatorname{ch}(y - \eta)}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(y - \eta) - \frac{p_T^2}{m_T^2}}^3} \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & , \quad y - \eta > 0 \\ -1 & , \quad y - \eta < 0 \end{cases}$$

$$h = \frac{\text{sh}(y-\eta)}{\text{ch}(y-\eta) - \frac{p_T}{m_T} \cos \alpha} \frac{\text{sh}(y'-\eta)}{\text{ch}(y'-\eta) - \frac{p_T'}{m_T'} \cos \alpha'} - \varepsilon(y-\eta) \varepsilon(y'-\eta) +$$

$$+ \frac{\frac{p_T}{m_T} \sin \alpha}{\text{ch}(y-\eta) - \frac{p_T}{m_T} \cos \alpha} \frac{\frac{p_T'}{m_T'} \sin \alpha'}{\text{ch}(y'-\eta) - \frac{p_T'}{m_T'} \cos \alpha'}.$$

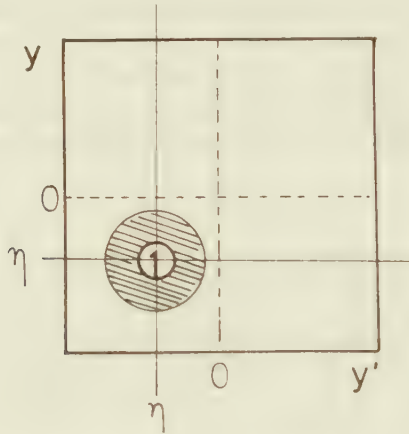
Ein entscheidender Punkt ist nun, daß die Einteilchenspektren in $R(\eta)$ mit Funktionen ($f-\varepsilon$ und g) gefaltet werden, die lokal in der Rapidität sind, d.h. außerhalb einer kleinen Umgebung von η verschwinden (Figur (4-1) A und B). Folglich sind diese Beiträge zu den Plateauhöhen $g_v(0)$ proportional und unabhängig von η . Denn bei einer Verschiebung von η ($\eta_1 \rightarrow \eta_2$) wandern $f-\varepsilon$ und g nur innerhalb des Plateaus von $g_v(y)$ (siehe II.1.2):



so daß sich der Wert der Integrale nicht ändert. Die Funktion h , mit der die Korrelationsfunktionen $\mathcal{C}_{VV'}$ gefaltet sind, besitzt nicht diese angenehme Eigenschaft. Zwar ist der Anteil (1)

$$\frac{\frac{p_T}{m_T} \sin \alpha \quad \frac{p'_T}{m'_T} \sin \alpha'}{\left(\operatorname{ch}(y-\eta) - \frac{p_T}{m_T} \cos \alpha \right) \left(\operatorname{ch}(y'-\eta) - \frac{p'_T}{m'_T} \cos \alpha' \right)}$$

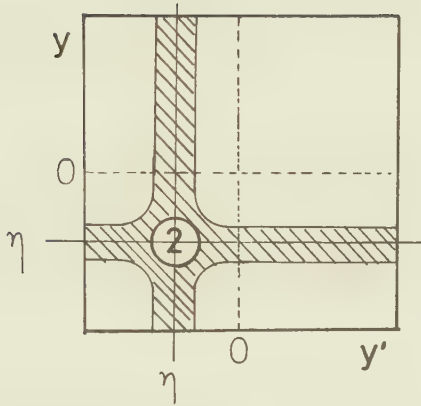
lokal in der (y, y') -Ebene:



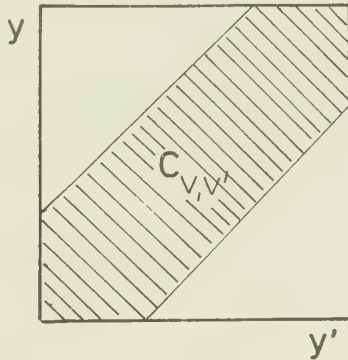
d.h. er verschwindet außerhalb des schraffierten Gebiets, nicht aber

$$\frac{\operatorname{sh}(y-\eta) \operatorname{sh}(y'-\eta)}{\left(\operatorname{ch}(y-\eta) - \frac{p_T}{m_T} \cos \alpha \right) \left(\operatorname{ch}(y'-\eta) - \frac{p'_T}{m'_T} \cos \alpha' \right)} - \varepsilon(y-\eta) \varepsilon(y'-\eta).$$

Dieser Anteil (2) verschwindet nur, wenn sowohl y als auch y' von η weit entfernt sind (siehe Figur (5-1)C):



Daher ist dieses Integral im allgemeinen proportional zur schraffierten Fläche, d.h. zu $y_{\max} - y_{\min} \sim \ln s$ und könnte möglicherweise bei asymptotischen Energien dominieren. Es kommt auf die Art der Korrelationen an. Experimentell wird das Bild gestützt, daß im Zentralgebiet Hadronen einander nur spüren, wenn sie in der Rapidität benachbart sind (siehe II.1.2). Für solche Korrelationen, die mit $|y - y'|$ schnell abfallen:



liefert daher wieder (wie schon beim Term (1)) nur eine kleine Umgebung von $y \sim y' \sim \eta$ einen Beitrag, so daß die Integration keine Energieabhängigkeit erzeugt. Für den Fall, daß $\mathcal{C}_{y,y'}(y, y')$ überhaupt nur von der Rapiditäts-

differenz $(y - y')$ abhängt, ist $\sum_{v, v'} s_v s_{v'} \iint h \mathcal{C}_{vv'} \frac{d^3 p}{E} \frac{d^3 p'}{E'}$ unabhängig von η , da

$$\begin{aligned} & \iint h(y - \eta_2, y' - \eta_2) \mathcal{C}_{vv'}(y - y') dy dy' = \\ & = \iint h(\tilde{y} - \eta_2, \tilde{y}' - \eta_2) \mathcal{C}_{vv'}(\tilde{y} - \tilde{y}') d\tilde{y} d\tilde{y}' = \\ & = \iint h(y - \eta_1, y' - \eta_1) \mathcal{C}_{vv'}(y - y') dy dy' \\ & \text{mit } \tilde{y} = y + \eta_2 - \eta_1, \quad \tilde{y}' = y' + \eta_2 - \eta_1. \end{aligned}$$

für zwei willkürlich gewählte Werte η_1 und η_2 . Die restlichen Terme in $R(\eta)$, $b - (s_a - s_b) = s_a (\tanh(\gamma_a - \eta) - 1) + s_b (\tanh(\gamma_b - \eta) + 1)$ (Figur (4-1)C) und $\langle \Delta(\eta) \rangle$ (Figur II(1-6)), verschwinden für kleine η und große Energien ($s \rightarrow \infty$). Der mittlere, quadratische Ladungstransfer $\langle \Delta^2(\eta) \rangle$ schließlich ist ebenfalls nahezu konstant in η .

Wir können somit zusammenfassen:

1. Das normierte Bremsstrahlungsspektrum $\frac{\omega}{\sigma_{ab}} \frac{d\sigma^r}{d^3 k}$ bei großen Winkeln im Schwerpunktsystem von a und b ist flach in η ,
 - in dem Maß, in dem die Hadronichten und $\langle \Delta(\eta) \rangle$ im Zentralgebiet von der Rapidität unabhängig sind,
 - wenn die Korrelationsfunktionen nur von der Rapiditätsdifferenz abhängen.
2. Auch die Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ überträgt sich einfach von den hadronischen Größen $(\beta_v(y; s), \mathcal{C}_{vv'}(y, y'; s))$ $\langle \Delta^2(\eta; s) \rangle$ auf die Bremsstrahlung.
3. Die Transversalimpulsabhängigkeit $1/k_T^2$ folgt direkt aus der für jede weiche Bremsstrahlung typischen Frequenzverteilung $d\omega/\omega$.

Nach den in II.1 präsentierten experimentellen Informationen über inklusive, hadronische Größen sollte das Bremsstrahlungsspektrum für $s \rightarrow \infty$ also tatsächlich im Zentralgebiet ein Plateau ausbilden, dessen Höhe von s unabhängig ist oder nur schwach mit $\ln s$ wächst.

4.2 Im Gegensatz dazu steigt die Photondichte für eine feste Energie ω in Vorwärtsrichtung mit der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ an (III.3.2). Das Resultat (3.16) zeigt jedoch, daß die invariante Photonverteilung $\omega \frac{d\sigma^+}{d^4k} \big|_{\theta=0^\circ}$ für $s \rightarrow \infty$ nur vom Verhältnis $x = \frac{2k_L}{\sqrt{s}} (= \frac{2\omega}{\sqrt{s}} \text{ bei } \theta=0^\circ)$ abhängt^{x)}, falls die Hadrondichten die entsprechende Eigenschaft besitzen:

$$S(p_L, p_T; s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} S(x_H = \frac{2p_L}{\sqrt{s}}, p_T).$$

Man spricht dann von Feynman-"Scaling" [39]. Zusammen mit dem obigen Ergebnis für große Winkel θ folgt also: Falls die inklusiven Hadronspektren "scalieren", dann zeigt auch das Bremsstrahlungsspektrum "Scaling". Es sollte aber nicht vergessen werden, daß unsere ganze Analyse nur für weiche Photonen, d.h. für kleine k_T und sehr kleine x ($x \sim \frac{\omega}{\sqrt{s}} \ll 1$) gilt.

Abschließend möchten wir noch bemerken, daß die Bremsstrahlung bei $\theta = 0^\circ$ in pp-Kollisionen neben dem Beitrag von den geladenen Pionen auch eine merkliche Komponente von den Protonen enthält. Der Grund dafür liegt in der großen Protonendichte bei kleinen Winkeln zur Strahlrichtung ("leading particle"-Effekt).

^{x)} Wir betrachten nur den Hauptterm in (3.16). Der erste Term im Rest R_0 verschwindet für $s \rightarrow \infty$ wie $\frac{\langle n \rangle}{s} \sim \frac{\ln s}{s}$, der zweite liefert, falls die azimuthalen Korrelationen s-unabhängig sind, einen endlichen, aber vernachlässigbaren Beitrag (III.5).

5. Numerische Abschätzung

Da wir im nächsten Kapitel Beispiele für Bremsstrahlungsphänomene bei hoch-energetischer pp-Streuung betrachten wollen, beschränken wir uns für die folgenden numerischen Rechnungen auf diesen speziellen Grundprozeß. Die Diskussion im letzten Abschnitt hat gezeigt, daß das Bremsstrahlungsspektrum durch die Werte bei $\Theta = 90^\circ$ und $\Theta = 0^\circ$ im wesentlichen fixiert ist ^{x)}. Deshalb genügt es, die Abschätzung für diese beiden Winkel durchzuführen.

5.1 Das Bremsstrahlungsspektrum bei $\Theta = 90^\circ$

Um die Rechnungen möglichst einfach zu machen, verwenden wir für die Hadronspektren eine etwas rohe, aber vom Ergebnis her hinreichend genaue Parametrisierung. Auf Grund der in II.1 zusammengestellten experimentellen Fakten nehmen wir im einzelnen an:

- (1) Alle geladenen Hadronen sind Pionen.
- (2) Die 1-Teilchenspektren faktorisieren in y und p_T :

$$g(y, p_T) = g(y) \sigma(p_T) \quad (5.1)$$

Die Transversalimpulsverteilung $\sigma(p_T) \sim e^{-a p_T}$, $a = 6.5 \text{ GeV}^{-1}$
 sei auf 1 normiert: $\int \sigma(p_T) d^2 p_T = 1$. Die Rapiditätsverteilung $g(y)$
 sei konstant: $g(y) \approx g(0)$

- (3) Die transversalen Korrelationen spielen im Vergleich zu den Korrelationen in der Rapidität, die durch die Korrelationsfunktion

$$\mathcal{C}(y, y'; p_T, p'_T; \phi) = \mathcal{R}(y, y') g(y, p_T) g(y', p'_T) \quad (5.2)$$

beschrieben werden, keine Rolle. (In diesem Ansatz ist

$$\mathcal{R}(y, y') = \frac{\iint \mathcal{C}(y, y'; p_T, p'_T; \phi) d^2 p_T d^2 p'_T}{\int g(y, p_T) d^2 p_T \cdot \int g(y', p'_T) d^2 p'_T}$$

die in II.1 diskutierte Korrelationsgröße.)

^{x)} Wir wählen als Bezugssystem das pp-Schwerpunktsystem.

Für die restlichen Größen $g(o)$, $R(y,y')$, $\langle \Delta \rangle$ und $\langle \Delta^2 \rangle$ nehmen wir experimentell bestimmte Werte. Wir möchten betonen, daß obige Annahmen nur in die Abschätzung des Restterms $R(o)$ von (3.8) eingehen; mit anderen Worten, sie werden ausschließlich bei der Trennung von wichtigen und vernachlässigbaren Termen benutzt.

Wir gehen nun Term für Term von $R(o)$ durch:

a) $b - (s_a - s_b) = 0$ (Figur (4-1)C).

b) $\langle \Delta(o) \rangle = 0$ (Figur II(1-6)A).

c) $\sum_v s_v \int (f - \varepsilon) g_v dy d^2 p_T = 0$, weil $f - \varepsilon$ eine ungerade Funktion von y ist (Figur (5-1)A), während $g_v(y)$ symmetrisch bezüglich $y = 0$ ist.

d) $\sum_v s_v^2 \int g g_v dy d^2 p_T \simeq \sum_v s_v^2 g_v(o) \int g(y, p_T) \sigma(p_T) dy d^2 p_T$

$$= g_{ch}(o) \int \bar{g}(y) dy$$

(5.3)

$$\simeq 1.4 g_{ch}(o)$$

Figur (5-1)B zeigt $\bar{g}(y) = \int g(y, p_T) \sigma(p_T) d^2 p_T$.

Der Zahlenfaktor in (5.3) hängt etwas vom Abschneideparameter a in (5.1) ab:

$a \text{ [GeV}^{-1}]$	$\int \bar{g}(y) dy$
6	1.6
6.5	1.4
7	1.2

$$\begin{aligned} \text{e) } \sum_{\nu, \nu'} S_{\nu} S_{\nu'} & \iint h \mathcal{L}_{\nu\nu'} dy dy' d^2 p_T d^2 p_T' = \\ & = \sum_{\nu, \nu'} S_{\nu} S_{\nu'} \iint (\bar{f}(y) \bar{f}(y') - \varepsilon(y) \varepsilon(y')) R_{\nu\nu'}(y, y') g_{\nu}(y) g_{\nu'}(y') dy dy' \end{aligned}$$

mit^{x)} $\bar{f}(y) = \int f(y, p_T) \sigma(p_T) d^2 p_T$. Die Funktion

$\bar{f}(y) \bar{f}(y') - \varepsilon(y) \varepsilon(y')$ ist in Figur (5-1)C dargestellt. Für

$\sum_{\nu, \nu'} S_{\nu} S_{\nu'} R_{\nu\nu'} = R_{++} + R_{--} - R_{+-} - R_{-+}$ schreiben wir abkürzend $D[R]$. Weiter vernachlässigen wir den Unterschied von g_+ und g_- :

$$g_+ \simeq g_- \simeq \frac{1}{2} g_{\Delta}$$

(siehe Figur II(1-5)) und erhalten durch Ausnützen der Symmetrie im Anfangszustand (pp):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} g_{\Delta}^2(0) & \left[\iint (\bar{f}(y) \bar{f}(y') - \varepsilon(y) \varepsilon(y')) D[R](y, y') dy dy' \right] = \\ & = \frac{1}{2} g_{\Delta}^2(0) \left[\iint_{\substack{y > 0 \\ y' > 0}} (\bar{f}(y) \bar{f}(y') - 1) (D[R](y, y') - D[R](y, -y')) dy dy' \right] \end{aligned}$$

In III.4.1 wurde gezeigt, daß für Korrelationen mit kurzer Reichweite der Integrand nur in einem kleinen Gebiet (G) um $y = y' = 0$ von Null verschieden ist, so daß wir das Integral mit

^{x)} Die Funktion $f(y, p_T)$ ist in (4.2) definiert.

$$\overline{D[R](y, y') - D[R](y, -y')}^G \iint_G (\bar{f}(y) \bar{f}(y') - 1) dy dy' ,$$

größenordnungsmäßig wenigstens, abschätzen können. Für den Mittelwert

$$\overline{D[R](y, y') - D[R](y, -y')}^G \quad \text{im Gebiet} \quad \{0 \leq y, y' \leq 2\} \quad \text{findet man aus}$$

Figur II(1-3)A (FNAL-Daten für $p_{\text{Lab}} = 400 \text{ GeV/c}$) etwa -0.6 und erhält
 folglich wegen $\iint_G (\bar{f}(y) \bar{f}(y') - 1) dy dy' \simeq -1$:

$$\sum_{y, y'} s_y s_{y'} \iint h \mathcal{L}_{yy'} dy d^2 p_T dy' d^2 p'_T \simeq 0.3 g_{ch}^2(0) .$$

Wenn wir dieselbe Abschätzung "bin"-weise ausführen - die entsprechenden Verteilungen von $D[R](y, y')^{x)}$ und $\bar{f}(y) \bar{f}(y') - 1$ sind in Figur (5-2) skizziert - bekommen wir einen etwas kleineren Wert:

$$\sum_{y, y'} s_y s_{y'} \iint h \mathcal{L}_{yy'} dy d^2 p_T dy' d^2 p'_T \simeq 0.2 g_{ch}^2(0) . \quad (5.4)$$

Zusammengefaßt ergibt sich also für den Restterm $R(0)$:

$$R(0) \simeq 0.35 g_{ch}(0) + 0.05 g_{ch}^2(0) \quad (5.5)$$

und insgesamt für das Bremsstrahlungsspektrum bei $\theta = 90^\circ$:

$$\frac{\omega}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^T}{d^3 k} \simeq \frac{\alpha}{\pi^2 k_T^2} \left(\langle \Delta^2(0) \rangle + 0.35 g_{ch}(0) + 0.05 g_{ch}^2(0) \right) . \quad (5.6)$$

^{x)} Die Zahlen sind nur grob aus Figur II(1-3)A abgelesen worden.

Einige repräsentative Daten für den mittleren, quadratischen Ladungstransfer $\langle \Delta^2(0) \rangle$ und die Plateauhöhe $g_{ch}(0)$ zeigt folgende Liste:

(1)

$\langle \Delta^2(0) \rangle$	$p_{Lab} [GeV/c]$
0.8	24 [21]
0.9	102 [15]
0.9	205 [15]
1.1	400 [20]

(2)

(5.7)

$g_{ch}(0)^{x)}$	$p_{Lab} [GeV/c]$
1.22	24 [40]
1.5	102 [15]
"	205 "
"	400 "
1.6	1500 [40]^{xx)}

Man sieht, daß die Korrelationen zwischen den Hadronen fast vollständig im Cahn'schen Term III(1.7) stecken und im Restterm praktisch keine Rolle mehr spielen:

$$\frac{0.05 \ g_{ch}^2(0)}{\langle \Delta^2(0) \rangle} \simeq 0.1 \quad .$$

Ihr Einfluß äußert sich also einfach darin, daß die Plateauhöhe des Bremsstrahlungsspektrums vom Ladungstransferparameter $\langle \Delta^2 \rangle$ bestimmt wird und nicht

^{x)} bei 24 GeV/c: $g_{ch} = g_{\pi^+} + g_{\pi^-} + g_p$, sonst $g_{\pi^+} + g_{\pi^-}$.

^{xx)} Extrapolation von ISR-Daten.

der mittleren Zahl der geladenen Hadronen proportional ist, wie es bei unkorrelierter Produktion der Fall wäre. Weiter bestätigt das Ergebnis (5.6) die Vermutung (siehe III.1.2), daß die direkt in Richtung Photondetektor fliegenden Hadronen einen beträchtlichen Beitrag (etwa 50 %) zur Bremsstrahlung liefern, verglichen mit den schnellen Hadronen mit einem großen Winkel zum Detektor:

$$\frac{0.35 \, g_{ch}(0)}{\langle \Delta^2(0) \rangle} \simeq 0.5 \quad .$$

Figur (5-3) zeigt das auf den inelastischen pp-Wirkungsquerschnitt normierte Bremsstrahlungsspektrum für $\Theta = 90^\circ$ und $p_{\text{Lab}} = 24, 1500 \text{ GeV/c}$ in Abhängigkeit vom Transversalimpuls k_T :

$$\frac{\omega}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3k} = \frac{C}{k_T^2} \quad (5.8)$$

mit

$$\begin{aligned} C &= \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\langle \Delta^2(0) \rangle + 0.35 \, g_{ch}(0) \right) \\ &= 0.9 \cdot 10^{-3} & p_{\text{Lab}} &= 24 \text{ GeV/c} \\ &= 1.1 \cdot 10^{-3} & &= 102 \text{ GeV/c} \\ &= 1.2 \cdot 10^{-3} & &= 1500 \text{ GeV/c} \quad x) \quad . \end{aligned}$$

5.2 Das Bremsstrahlungsspektrum bei $\Theta = 0^\circ$

Für die Abschätzung der einzelnen Terme in (3.16) benötigen wir die Hadronverteilungen in x_H und eine Parametrisierung für die azimuthalen Korrelationen. Die 1-Teilchenspektren, die den 1. Term in (3.16) bestimmen, können näherungsweise wie folgt beschrieben werden:

x) Für $\langle \Delta^2(0) \rangle$ wurde der Wert bei 400 GeV/c genommen, da bei ISR-Energien keine Daten verfügbar sind. Der Koeffizient C könnte also etwas größer sein.

A)

$$g_{\pi^{\pm}}(x_H, p_T) \simeq g_{\pi^{\pm}}(x_H) \sigma_{\pi}(p_T)$$

$$\text{mit } g_{\pi^{\pm}}(x_H) \simeq \kappa (1-|x|)^3, \quad \kappa \simeq 0.4 \quad (5.9)$$

$$\sigma_{\pi}(p_T) \sim e^{-a_{\pi} m_T}, \quad a_{\pi} = 6.5 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}.$$

$F(x'_H) = (1-|x'_H|)^{3.1}$; $x'_H = \frac{p_L}{p_{\max}}$ ist eine gute phänomenologische Beschreibung der Strukturfunktion $F(x'_H) = \frac{1}{\sigma_{\text{tot}}} \int E \frac{d\sigma^{\pi}}{d^3p} d^2p_T$ für $\pi = \frac{3}{2}(\pi^+ + \pi^-)$ und $p_{\text{Lab}} = 24 \text{ GeV/c}$. Dieses Potenzverhalten wird durch eine große Klasse von Partonmodellen nahegelegt [41]. Wir vernachlässigen den Unterschied zwischen x'_H und x_H (Massenterme) und bekommen dann:

$$g_{\pi^{\pm}}(x_H) \simeq \frac{1}{3} \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\sigma_{\text{inel}}} (1-|x_H|)^3.$$

B)

$$g_p(x_H, p_T) \simeq g_p(x_H) \sigma_p(p_T)$$

$$\text{mit } g_p(x_H) \simeq |x_H|$$

$$\sigma_p(p_T) \sim e^{-a_p m_T}, \quad a_p = 6 \text{ [GeV}^{-1}\text{]}.$$

(Dabei vernachlässigen wir den diffraktiven Peak bei $|x_H| \gtrsim 0.9$, der einen kleinen zusätzlichen Beitrag liefert.)

Obwohl diese Darstellung den 24 GeV/c-Daten [40] angepaßt ist, sollte der daraus resultierende Wert für den 1. Term von (3.16) auch für höhere Energien richtig sein, da der Beitrag von kleinen x_H , wo die Spektren noch energieabhängig sind, wegen des Faktors x_H^2 im Integral $\int x_H^2 g(x_H) \frac{dx_H}{x_H}$ unterdrückt ist und für große x_H die Hadronspektren scalen. Wir erhalten für den Pionanteil:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^1 x_H^2 \frac{p_T^2}{m_{\pi T}^4} g_{\pi}(x_H) \sigma_{\pi}(p_T) \frac{dx_H}{x_H} d^2 p_T &\simeq \\
 &\simeq 2 \left\langle \frac{p_T^2}{m_{\pi T}^4} \right\rangle \kappa \int_0^1 x_H^2 (1-x_H)^3 \frac{dx_H}{x_H} \simeq \\
 &\simeq \frac{\kappa}{10} \left\langle \frac{p_T^2}{m_{\pi T}^4} \right\rangle^{x)} \simeq 0.3 \text{ GeV}^{-2}
 \end{aligned}$$

und für den Protonbeitrag:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x_H^2 \frac{p_T^2}{m_{pT}^4} g_p(x_H) \sigma_p(p_T) \frac{dx_H}{x_H} d^2 p_T &\simeq \\
 &\simeq \left\langle \frac{p_T^2}{m_{pT}^4} \right\rangle \int_0^1 x_H^2 dx_H \simeq \\
 &\simeq \frac{1}{3} \left\langle \frac{p_T^2}{m_{pT}^4} \right\rangle^{+)} \simeq 0.06 \text{ GeV}^{-2}.
 \end{aligned}$$

Die experimentellen Werte, direkt aus den 24 GeV/c-Daten gewonnen [42], sind:

0.25 für die Pionen

0.06 für die Protonen .

Sie bestimmen den Hauptterm in der Bremsstrahlungsformel (3.16):

x) Mittelung mit $\sigma(p_T) \sim e^{-a m_T}$ liefert:

$$\left\langle \frac{p_T^2}{m_T^4} \right\rangle = \frac{1}{m^2} \left[\frac{z^2(2-z^2) e^z E_1(z) - z^2(1-z)}{2(1+z)} \right] ; \quad z = a \cdot m$$

$E_1(z)$ ist die sog. Integralexponentialfunktion $\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$.

$$\frac{1}{2} \sum S_V^2 \int X_H^2 \frac{p_T^2}{m_{VT}^4} S_V(X_H, p_T) \frac{dx_H}{\sqrt{X_H^2 + \frac{4m_{VT}^2}{S}}} d^2 p_T \simeq 0.3 \text{ GeV}^2. \quad (5.11)$$

Nun ist noch der Restterm R_0 abzuschätzen. Der zur geladenen Multiplizität proportionale Anteil verschwindet für $S \rightarrow \infty$ und ist auch bei endlichen Energien : $24 \ll P_{\text{lab}} \ll 1500 \text{ GeV/c}$ schon vernachlässigbar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \sum_V S_V^2 \left\langle \frac{p_T^2}{m_{VT}^2} \right\rangle \langle n_V \rangle &\simeq \frac{1}{S} \left(\left\langle \frac{p_T^2}{m_{VT}^2} \right\rangle \langle n_{\pi^+} + n_{\pi^-} \rangle + \right. \\ &+ \left\langle \frac{p_T^2}{m_{KT}^2} \right\rangle \langle n_{K^+} + n_{K^-} \rangle + \\ &\left. + \left\langle \frac{p_T^2}{m_{PT}^2} \right\rangle \langle n_P + n_{\bar{P}} \rangle \right) \end{aligned}$$

woraus für:

$[\text{GeV/c}] P_{\text{lab}}$	$S [\text{GeV}^2]$	$\langle n_{\pi^+} + n_{\pi^-} \rangle$	$\langle n_{K^+} + n_{K^-} \rangle$	$\langle n_P + n_{\bar{P}} \rangle$	
24	46	3	-	1.2	[40]
1500	2800	9	0.7	1.8	[43]

$\psi_1^{(x)}$

x)

$$\left\langle \frac{p_T^2}{m_T^2} \right\rangle = 1 - \frac{z^2 e^z E_1(z)}{1+z} ; \quad z = a \cdot m$$

für $G(p_T) \sim e^{-am_T}$.

$$\left\langle \frac{p_T^2}{m_{\pi}^2} \right\rangle = 0.7$$

$$\left\langle \frac{p_T^2}{m_{pT}^2} \right\rangle = 0.3$$

insgesamt:

$$\frac{1}{S} \sum_V S_V^2 \left\langle \frac{p_T^2}{m_{VT}^2} \right\rangle \langle n_V \rangle \simeq \begin{cases} 0.05 & \text{für } p_{\text{lab}} = 24 \text{ GeV/c} \\ 0.002 & \text{für } p_{\text{lab}} = 1500 \text{ GeV/c} \end{cases} \quad (5.12)$$

folgt. Im Gegensatz dazu liefert der von den azimuthalen Korrelationen abhängige Term in R möglicherweise auch für $s \rightarrow \infty$ einen endlichen Beitrag, da das Integral über $e^{y+y'}$ im allgemeinen proportional zu s ist. Um diese Frage zu klären, müssen wir für die Abhängigkeit der Korrelationsfunktion $\mathcal{C}(y, y'; p_T, p_T', \phi)$ vom Azimuthalwinkel ϕ (siehe II.1.2) irgendeinen vernünftigen Ansatz machen. Wir wählen:

$$\mathcal{C}(y, y'; p_T, p_T'; \phi) = \mathcal{G}(y, p_T) \mathcal{G}(y', p_T') \left(R(y, y') + A(y, y') \cos \phi \right). \quad (5.13)$$

Der erste Term beschreibt die Korrelationen in der Rapidität und ist identisch mit dem Ansatz (5.2), insbesondere ist $R(y, y')$ die in Figur II(1-3)A dargestellte, über die transversalen Variablen p_T, p_T', ϕ integrierte Verteilung^{x)}. Der zweite Term ist der ϕ -Verteilung in Figur II(1-4)B nachempfunden: wenn A negativ ist, hat man positive Korrelationen für $\phi = 180^\circ$ und negative für $\phi = 0^\circ$. Ihre Stärke wird durch den Absolutwert von A beschrieben und kann aus dem Asymmetrieparameter A_ϕ abgeleitet werden. Nach der Definition II(1.11) ist

^{x)} Der zu $\cos \phi$ proportionale Anteil in (5.13) verschwindet in $\iint \mathcal{C} d^2 p_T d^2 p_T'$.

$$A_{\phi}^{cd}(\Delta y) = \frac{\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{d\sigma^{cd}}{d\Delta y d\phi} d\phi - \int_0^{\pi/2} \frac{d\sigma^{cd}}{d\Delta y d\phi} d\phi}{\int_0^{\pi} \frac{d\sigma^{cd}}{d\Delta y d\phi} d\phi} \quad (5.14)$$

Die ϕ -Verteilung $\frac{1}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{cd}}{d\Delta y d\phi}$ hängt mit den 2-Teilchendichten folgendermaßen zusammen:

$$\frac{1}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{cd}}{d\Delta y d\phi} = \int g_{cd}(y, y'; p_T, p_T', \phi) \cdot \delta(y - y' - \Delta y) \cdot \delta(y + y' - \Sigma y) \cdot \delta(\alpha - \alpha' - \phi) d\Sigma y dy dy' d^2 p_T d^2 p_T'.$$

und kann mit dem Ansatz (5.13):

$$\begin{aligned} g_{cd} &= g_c g_d + \mathcal{C}_{cd} \\ &= g_c(y) g_c(p_T) g_d(y') g_d(p_T') \left(1 + R_{cd}(\Delta y) + A_{cd}(\Delta y) \cos \phi \right) \end{aligned}$$

und unter der zusätzlichen Annahme, daß $R(y, y')$ und $A(y, y')$ nur schwach von $\Sigma y = y + y'$ abhängen, ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{cd}}{d\Delta y d\phi} &= \frac{1}{4\pi} \int g_c\left(\frac{1}{2}(\Sigma y + \Delta y)\right) g_d\left(\frac{1}{2}(\Sigma y - \Delta y)\right) \left[1 + R_{cd}(\Delta y) + A_{cd}(\Delta y) \cos \phi \right] d\Sigma y \\ &\simeq \frac{1}{4\pi} \int g_c\left(\frac{1}{2}(\Sigma y + \Delta y)\right) g_d\left(\frac{1}{2}(\Sigma y - \Delta y)\right) d\Sigma y \left[1 + R_{cd}(\Delta y) + A_{cd}(\Delta y) \cos \phi \right]. \end{aligned}$$

Setzt man diese Näherung in (5.14) ein, folgt schließlich eine einfache Relation zwischen dem Asymmetrieparameter A_{ϕ} und der Korrelationsstärke A :

$$A_{\phi}^{cd}(\Delta y) = \frac{-2 A_{cd}(\Delta y)}{\pi (1 + R_{cd}(\Delta y))} \quad (5.15)$$

so daß man $A_{cd}(\Delta y)$ aus den Daten (Figur II(1-3)B und II(1-4)A) für $A_{\phi}^{cd}(\Delta y)$ und $R_{cd}(\Delta y)$ ausrechnen kann:

$$A_{cd}(\Delta y) = -\frac{\pi}{2} A_{\phi}^{cd}(\Delta y) (1 + R_{cd}(\Delta y)) \quad (5.16)$$

Z.B. erhält man für $\Delta y = 0$ ($p_{lab} = 102 \text{ GeV/c}$):

cd	$A_{\phi}^{cd}(0)$	$R_{cd}(0,0)$	$A_{cd}(0)$
++	0,02	0,4	- 0,04
--	0,02	0,3	- 0,04
+-	0,08	0,8	- 0,23

Jetzt haben wir alles Notwendige [(5.1), (5.13), (5.16)] an der Hand, um endlich den Pionanteil des Korrelationsterms in R_0 abschätzen zu können:

$$\begin{aligned} \sum_{v,v'} S_v S_{v'} \iint \frac{\vec{p}_T \vec{p}_T'}{m_{vT} m_{v'T}} e^{y+y'} \varphi_{vv'} dy dy' d^2 p_T d^2 p_T' &\simeq \\ &\simeq \frac{\pi^2}{2} \sum_{v,v'} S_v S_{v'} \iint \frac{p_T p_T'}{m_{vT} m_{v'T}} e^{y+y'} g_v(y) g_{v'}(y') g_v(p_T) g_{v'}(p_T') A_{vv'}(\Delta y) dy dy' d^2 p_T d^2 p_T' \end{aligned}$$

$$\simeq \frac{1}{2} \left\langle \frac{p_T}{m_{\pi T}} \right\rangle^2 \sum_{\gamma, \gamma'} s_\gamma s_{\gamma'} \iint e^{y+y'} g_\gamma(y) g_{\gamma'}(y') A_{\gamma\gamma'}(\Delta y) dy dy'.$$

Nach Transformation auf die Variablen Δy und Σy , wobei

$$\int_{-Y}^Y dy \int_{-Y}^Y dy' \quad \text{durch} \quad \frac{1}{2} \int_{-2Y}^{2Y} d\Delta y \int_{-2Y+|\Delta y|}^{2Y-|\Delta y|} d\Sigma y$$

ersetzt werden muß, erhalten wir:

$$\frac{1}{4} \left\langle \frac{p_T}{m_{\pi T}} \right\rangle^2 \sum_{\gamma, \gamma'} s_\gamma s_{\gamma'} \int_{-2Y}^{2Y} d\Delta y \int_{-2Y+|\Delta y|}^{2Y-|\Delta y|} d\Sigma y e^{\Sigma y} g_\gamma\left(\frac{1}{2}(\Sigma y + \Delta y)\right) g_{\gamma'}\left(\frac{1}{2}(\Sigma y - \Delta y)\right) A_{\gamma\gamma'}(\Delta y).$$

Da aber $D[A] = A_{++} + A_{--} - 2A_{+-}$ nur für $|\Delta y| < 1$ von Null verschieden ist (siehe II.1.2 und Figur II(1-4)A), folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\langle \frac{p_T}{m_{\pi T}} \right\rangle^2 \int_0^1 d\Delta y \int_{-2Y+|\Delta y|}^{2Y-|\Delta y|} d\Sigma y e^{\Sigma y} g_\gamma\left(\frac{1}{2}\Sigma y\right) g_{\gamma'}\left(\frac{1}{2}\Sigma y\right) A_{\gamma\gamma'}(\Delta y) &\simeq \\ &\simeq \frac{1}{2} \left\langle \frac{p_T}{m_{\pi T}} \right\rangle^2 g_\pi^2(0) \int_0^1 d\Delta y \left(e^{2\bar{Y}-|\Delta y|} - e^{-2\bar{Y}+|\Delta y|} \right) D[A](\Delta y) \\ &\simeq \frac{1}{2} \left\langle \frac{p_T}{m_{\pi T}} \right\rangle^2 g_\pi^2(0) D[A](0) e^{2\bar{Y}}. \end{aligned}$$

$\bar{Y}$ ist eine effektive Plateaulänge:

$$\bar{Y} \simeq Y - 2.5 \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{S}{m_{\text{eff}}^2}$$

(d.h. $m_{\text{eff}}^2 \sim m_\pi^2 \cdot e^5 = 3 \text{ GeV}^2$), die der Tatsache Rechnung trägt, daß sich das Plateau in Wirklichkeit nicht bis zur kinematischen Rapiditätsgrenze $Y = \frac{1}{2} \ln \frac{S}{m_\pi^2}$

erstreckt^{x)}. Numerisch finden wir für

$$\sum_{v,v'} s_v s_{v'} \iint \frac{\vec{p}_T \vec{p}'_T}{m_{vT} m'_{vT}} e^{y+y'} \varphi_{vv'} dy dy' d^2 p_T d^2 p'_T \simeq \frac{S}{2 m_{eff}^2} \left\langle \frac{p_T}{m_{\pi T}} \right\rangle^2 S_{\pi}^2(0) D[A](0)$$

mit

$$\left\langle \frac{p_T}{m_{\pi T}} \right\rangle \simeq 0.7^{xx)} \quad (5.17)$$

$$S_{\pi}(0) \simeq 0.7 \quad (\text{aus (5.7)})$$

$$D[A](0) \simeq 0.4 \quad (\text{aus (5.16)})$$

schließlich:

$$\frac{1}{S} \sum_{v,v'} s_v s_{v'} \iint \frac{\vec{p}_T \vec{p}'_T}{m_{vT} m'_{vT}} e^{y+y'} \varphi_{vv'} dy dy' d^2 p_T d^2 p'_T \sim 0.02 \text{ GeV}^{-2}. \quad (5.18)$$

Die azimuthalen Korrelationen liefern also auch für $s \rightarrow \infty$ einen Beitrag, der aber um eine Größenordnung kleiner ist als der Beitrag (5.11). Folglich gilt in guter Näherung für das Bremsstrahlungsspektrum bei $\theta = 0^\circ$:

$$\frac{\omega}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3 k} \simeq \frac{G_0}{X^2} \quad (5.19)$$

mit

$$\begin{aligned} G_0 &\simeq \frac{\alpha}{2\pi^2} \sum_v \int X_H^2 \frac{p_T^2}{m_{vT}^4} S_v(x_H, p_T) \frac{d^3 p}{E} \\ &\simeq 0.22 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^{-2} \quad ([42]). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist in Figur (5-4) dargestellt.

^{x)} Dieser "cut-off" ist hier notwendig, da große y mit dem Gewicht e^y beitragen.

^{xx)} $\left\langle \frac{p_T}{m_T} \right\rangle = \frac{2\Gamma(3/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{ze^{\frac{z}{2}} K_1(z)}{1+z}$ mit $z = am$
für $\phi(p_T) \sim \exp(-am_T)$.

6. Zusammenfassung

Ausgehend von der exakten Summenregel (2.4) für das weiche Bremsstrahlungsspektrum wurden folgende Ergebnisse abgeleitet:

- (1) Bei großen Winkeln Θ , d.h. für η aus dem Zentralgebiet, enthält das Photonspektrum im wesentlichen zwei Komponenten:

$$\frac{\omega}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3k} \simeq \frac{\alpha}{\pi^2 k_T^2} \left(\langle \Delta^2(\eta) \rangle + R(\eta) \right),$$

- einen zum mittleren, quadratischen Ladungstransfer $\langle \Delta^2(\eta) \rangle$ proportionalen Beitrag von den hadronischen Ladungsfluktuationen und

- einen zur Dichte der geladenen Hadronen in der Umgebung der Photonrapidity η proportionalen Anteil $R(\eta) = \frac{1}{4} \int g g dy d^2p_T \simeq 0.35 g_{ch}(\eta \simeq \eta)$.

- (2) Im Zentralgebiet ist das Photonspektrum nahezu unabhängig von η , oder in Θ ausgedrückt: es steigt bei fester Energie ω von $\Theta = 90^\circ$ aus zunächst wie $\frac{1}{\sin^2 \Theta}$ an.

- (3) In Vorwärtsrichtung (η außerhalb des Zentralgebietes) wächst das Photonspektrum etwas schwächer mit $\Theta \rightarrow 0^\circ$ und erreicht bei $\Theta = 0^\circ$ den Wert:

$$\frac{\omega}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3k} \simeq \frac{\alpha}{2\pi^2 x^2} \sum_v s_v^2 \int x_v^2 \frac{p_T^2}{m_{vT}^4} g_v(p) \frac{d^3p}{E}.$$

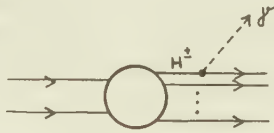
x) Die Funktion g ist in III(4.2) definiert.

- (4) Das weiche Bremsstrahlungsspektrum erfüllt "Feynman-Scaling", falls die Hadronspektren die "Scaling"-Eigenschaft besitzen.

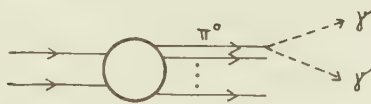
Dieses Ergebnis gilt, von trivialen Änderungen abgesehen (andere Anfangsladungen), für beliebige inelastische Hadronreaktionen bei hohen Energien.

IV. Bremsstrahlungseffekte in inelastischen pp-Reaktionen bei hohen Energien

Das naheliegendste Beispiel, in dem die weiche Bremsstrahlung in Erscheinung treten könnte, ist natürlich die Photonproduktion selbst. Einmal wächst die Bremsstrahlungskomponente sehr rasch an, wenn man zu immer kleineren Photonenergien geht (Infrarot-Verhalten), zum andern werden die Energieverteilungen für die Bremsstrahlungspotonen:

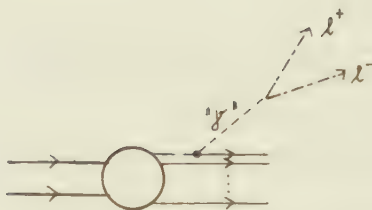


und die Photonen vom π^0 -Zerfall:



sehr verschieden, und daher im Prinzip unterscheidbar. Auf der Basis der vorher gewonnenen Ergebnisse diskutieren wir im 1. Abschnitt den Bremsstrahlungsbeitrag zum inklusiven Photonspektrum.

Unter der Annahme, daß sich virtuelle Photonen nahe der Massenschale $k^2 = 0$ nicht wesentlich anders als reelle verhalten, treffen obige Überlegungen auch auf die elektromagnetische Erzeugung von Leptonpaaren mit kleiner invarianter Masse und niedrigen Energien zu:



Die weiche, virtuelle Bremsstrahlung könnte also möglicherweise eine ergiebige Quelle für niederenergetische Leptonen sein. Dieser Aspekt ist momentan besonders interessant, da der Ursprung der in pp-Reaktionen beobachteten hohen Rate von Elektronen mit kleinen Energien bis jetzt noch unbekannt ist. Die Leptonproduktion via weicher Bremsstrahlung wird im 2. Abschnitt eingehend untersucht.

1. Bremsstrahlungsbeitrag zum inklusiven γ^* -Spektrum

Es ist klar, daß wir nach einem Bremsstrahlungseffekt bei sehr kleinen Transversalimpulsen suchen müssen (siehe III.6). Da die experimentellen Photonspektren, die wir zur Diskussion heranziehen wollen, bei festen Produktionswinkeln θ als Funktion der Energie ω gemessen wurden [44,45], konzentrieren wir uns deshalb auf möglichst kleine ω und θ . Vom letzten Kapitel her wissen wir, daß die Winkelverteilung der Bremsstrahlung für $\theta \rightarrow 0$ vom Ergebnis III (5.8):

$$\frac{\omega}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{\gamma^*}}{d^3k} = \frac{1}{\omega^2} \frac{C}{\sin^2\theta} ,$$

das für den Winkelbereich abgeleitet wurde, der dem "Plateau"-Bereich in den Rapiditätsverteilungen der Hadronen entspricht, abweicht. Wir extrapolieren aus diesem Grund III(5.8) so in Vorwärtsrichtung, daß bei $\theta = 0^\circ$ gerade der Wert III(5.19) erreicht wird. Als einfache Interpolation bietet sich

$$\frac{\omega}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{\gamma^*}}{d^3k} = \frac{C}{k_T^2 + \frac{C}{C_0} x^2} = \frac{F(\theta)}{\omega^2} \quad (1.1)$$

an. Die Winkelverteilung

$$F(\theta) = \frac{C}{\sin^2 \theta + \frac{4C}{5C_0} \cos^2 \theta} \quad (1.2)$$

(Figur (1-1)) besitzt alle, im III. Kapitel beschriebenen Eigenschaften. Insbesondere nähert sie sich mit wachsendem s immer mehr der asymptotischen Verteilung $\frac{C}{\sin^2 \theta}$ (Plateaulänge $\sim \ln s \rightarrow \infty$)^{x)}.

Zur Orientierung, bei welchen Photonenergien die Bremsstrahlung überhaupt signifikant wird, vergleichen wir das experimentelle, über den Raumwinkel Ω gemittelte γ -Spektrum für $\sqrt{s} = 6.7$ GeV [44] mit dem entsprechenden Bremsstrahlungsspektrum:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^\gamma}{d\omega} / 1 \text{ sr} &= \frac{\sigma_{PP}}{\omega} \frac{1}{4\pi} \int F(\theta) d\Omega \\ &= \frac{C \sigma_{PP}}{2\beta \omega} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \\ \text{mit } \beta &= \sqrt{1 - \frac{4C}{5C_0}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Es scheint auf den ersten Blick (Figur (1-2)), daß die Bremsstrahlung erst bei extrem kleinen Photonenergien ($\omega \sim 1$ MeV) ins Gewicht fällt. Experimentell werden jedoch die Photonraten nicht scharf bei einer Energie ω gemessen, sondern immer in einem mehr oder weniger breiten Energieintervall $\omega \pm \Delta\omega$, so daß bei kleinen ω der Infrarot-Peak unter Umständen beitragen kann. Ein weiteres Argument dafür, daß die Bremsstrahlung eventuell schon bei höheren Energien wichtig wird, liefert eine theoretische Analyse der π^0 -Komponente von R.N. Cahn [4], die im folgenden kurz beschrieben wird.

Die experimentellen Photonspektren enthalten Komponenten von verschiedenen Quellen, z.B. von den Zerfällen:

^{x)} Wir nehmen an, daß die hadronischen Parameter C und C_0 (III(5.8) und (5.19)) für $s \rightarrow \infty$ konstant bleiben.

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$$

$$\eta \rightarrow 2\gamma, 2\gamma\pi^0, 3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0, \pi^+\pi^-\gamma \quad (3.2 \gamma \text{ pro } \eta)$$

$$K_S^0 \rightarrow 2\pi^0 \quad (1.25 \gamma \text{ pro } K_S^0)$$

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\gamma,$$

so daß die einzelnen Beiträge kaum zu trennen sind. Da der π^0 -Beitrag, zumindest im Zentralgebiet, dominant ist, wird der Rest einfach ignoriert. Die entsprechende Photonverteilung findet man durch Integration über das inklusive π^0 -Spektrum unter der kinematischen Bedingung:

$$0 = k_2^2 = (p - k_1)^2 = m_\pi^2 - 2pk_1$$

für den Zerfall eines reellen Pions mit dem Impuls p in zwei reelle Photonen mit den Impulsen k_1 und k_2 :

$$\omega \frac{d\sigma^{\gamma(\pi^0)}}{d^3k} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3p}{E} \left(E \frac{d\sigma^{\pi^0}}{d^3p} \right) \delta(m_\pi^2 - 2pk) \quad (1.4)$$

Falls $\frac{E}{m_\pi} \gg 1$, darf man den Öffnungswinkel zwischen Pion und Photon vernachlässigen ($\vec{p}$ ist dann parallel zu $\vec{k}$) und erhält die Approximation von Sternheimer [46]:

$$\omega \left. \frac{d\sigma^{\gamma(\pi^0)}}{d^3k} \right|_\theta \simeq \frac{2}{\omega} \int_\omega^{\sqrt{s}/2} dE \left(E \left. \frac{d\sigma^{\pi^0}}{d^3p} \right|_\theta \right) \quad (1.5)$$

Folgt zum Beispiel das Pionspektrum bei $\theta = 90^\circ$ einem Potenzgesetz: $E \frac{d\sigma^{\pi^0}}{d^3p} \sim \frac{1}{p_T^n}$ dann gilt dasselbe Potenzgesetz auch für das Photonspektrum:

$$\omega \left. \frac{d\sigma^{\gamma(\pi^0)}}{d^3k} \right|_{90^\circ} \sim \frac{2}{\omega} \int_\omega^{\sqrt{s}/2} \frac{dE}{p_T^n} \simeq \frac{2}{\omega} \int_\omega^{\sqrt{s}/2} \frac{dE}{E^n} \simeq \frac{2}{n-1} \frac{1}{k_T^n} \quad (n > 1),$$

während $E \frac{d\sigma^{\pi^0}}{d^3p} \sim \exp(-ap_T)$ während

zu einem Photonspektrum mit einem zusätzlichen Faktor $\frac{1}{k_T}$ führt:

$$\omega \left. \frac{d\sigma^{\gamma(\pi^0)}}{d^3k} \right|_{90^\circ} \sim \frac{2}{\omega} \int_\omega^{\sqrt{s}/2} dE e^{-ap_T} \simeq \frac{2}{a k_T} e^{-a k_T} \quad (1.6)$$

Die am CERN-ISR bei verschiedenen Gesamtenergien und Produktionswinkeln gemessenen Photonraten werden in guter Näherung durch eine derartige invariante Funktion beschrieben [45] :

$$\frac{\omega}{\sigma_{\text{pp}}} \frac{d\sigma^{\gamma(\text{exp.})}}{d^3k} = \frac{A}{k_T} e^{-\frac{k_T}{k_0}} e^{-\frac{x}{x_0}} \quad (1.7)$$

mit $A = 1.48 \text{ GeV}^{-1}$, $k_0 = 0.162 \text{ GeV}$ und $x_0 = 0.083$. Für $\theta = 90^\circ$ (d.h. $x = 0$) und $\omega \gg m_\pi$ sind die Daten folglich mit einem π^0 -Spektrum der Form:

$$E \frac{d\sigma^{\pi^0}}{d^3p} \Big|_{90^\circ} = \frac{A}{2k_0} e^{-\frac{p_T}{k_0}} \quad (1.8)$$

verträglich. Bei kleineren θ ($x \neq 0$) hängt das Pionspektrum auch noch von $x_\pi = \frac{2p_L}{\sqrt{s}}$ ab. Für $\omega \rightarrow 0$ wird der Öffnungswinkel zwischen Pion und Photon groß und die Näherung von Sternheimer (1.5) demzufolge falsch. Cahn zeigte nun, im wesentlichen allein unter der Annahme von "Feynman"-Scaling für das Pionspektrum, daß die entsprechende Photonverteilung von einem endlichen Wert bei $x = 0$, $k_T = 0$ aus, der durch die Summenregel

$$\lim_{k_T \rightarrow 0} \omega \frac{d\sigma^{\gamma(\pi^0)}}{d^3k} (x=0, k_T) = \frac{2}{m_\pi^2} \int_0^\infty dk_T^2 \left(\omega \frac{d\sigma^{\gamma(\pi^0)}}{d^3k} (x=0, k_T) \right) \quad (1.9)$$

bestimmt ist, zunächst proportional zu k_T^2 ansteigt. Figur (1-3) illustriert dieses Ergebnis im Fall eines hypothetischen Pionspektrums:

$$E \frac{d\sigma^{\pi^0}}{d^3p} \sim e^{-ap_T}, \quad a = 6 \text{ GeV}^{-1}, \quad (1.10)$$

das als Extrapolation von (1.8) für $p_T \rightarrow 0$ und kleine $x_\pi \neq 0$ angesehen werden kann (ausgezogene Kurven). Die Normierung lieferte die Relation (1.9), wobei die rechte Seite mit Hilfe der Parametrisierung (1.7) ausgerechnet wurde. Zum Vergleich sind die invarianten Photondichten $\frac{\omega}{\sigma_{\text{pp}}} \frac{d\sigma^{\gamma(\text{exp.})}}{d^3k}$ für $\theta = 10^\circ, 24^\circ, 90^\circ$ und $\sqrt{s} = 44.7 \text{ GeV}$ eingezeichnet [45]^{x)}. Wenn k_T wächst, wird

^{x)} Soweit Daten für $k_T \lesssim 0.1 \text{ GeV}$ zur Verfügung stehen.

bei kleinen θ auch $x = k_T \frac{2 \cot \theta}{\sqrt{s}}$ merklich größer. Da die Vorhersage von Cahn auf einem x -unabhängigen Pionspektrum beruht, in Wirklichkeit aber auch das π^0 -Spektrum zu größeren x_π hin abfallen sollte, kann man verstehen, warum die theoretische Kurve für $\theta = 10^\circ$ und wachsende k_T systematisch über den Daten liegt. Die gestrichelten Kurven zeigen schließlich die nach (1.1) berechneten Bremsstrahlungsspektren.

Sicher läßt der Vergleich der Daten mit der von Cahn berechneten π^0 -Komponente und unserem Bremsstrahlungsspektrum keinen eindeutigen Schluß zu. Doch scheint die Photonrate beim kleinsten verfügbaren Transversalimpuls $k_T \approx 10$ MeV (entspricht $\omega = 50$ MeV und $\theta = 10^\circ$) wesentlich über dem vom π^0 -Zerfall her erwarteten Wert zu liegen (Figur (1-3)a). Da die Daten in Energieintervallen von 100 MeV Breite gemessen wurden, könnte der beobachtete Photonüberschuß auf Bremsstrahlung zurückzuführen sein. Formal divergiert der mittlere Bremsstrahlungsbeitrag für $0 < \omega < 100$ MeV. Wie groß er tatsächlich ist, hängt stark von der experimentellen Schwelle bei kleinen Energien ab, bis zu der Photonen überhaupt identifiziert werden können. Die ganze Untersuchung zeigt jedoch zumindest, daß man in dem Transversalimpulsbereich, in dem das vom π^0 -Zerfall herrührende Photonspektrum wieder abfällt, nämlich für

$$k_T \lesssim \frac{m^2}{2 \cdot \langle p_T^2 \rangle^{1/2}} \quad (\approx 20 \text{ MeV für } (1.10))$$

mit Bremsstrahlungseffekten rechnen muß. Weiter demonstriert Figur (1-3), wie grundlegend sich das Transversalimpuls-Verhalten der Bremsstrahlungskomponente von dem der π^0 -Komponente unterscheidet.

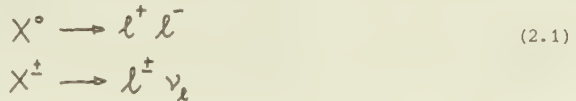
2. Direkte Produktion von Leptonen durch weiche, virtuelle Bremsstrahlung

2.1 Die Untersuchung der Produktion direkter Leptonen (also Leptonen, die von sehr kurzlebigen Quellen stammen) in inelastischen Hadronreaktionen hat in letzter Zeit viel Interesse gefunden, vor allem deswegen, weil die überraschend hohen Leptonraten bisher noch nicht zweifelsfrei erklärt werden konnten. Ein Überblick mit Schwerpunkt auf der experimentellen Seite des Problems wird zum Beispiel in [5] gegeben.^{x)} In Figur (2-1) sind einige Daten für das Lepton-Pion-

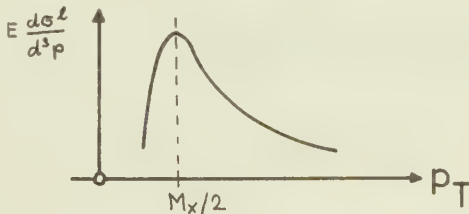
^{x)} Dort wird auch der Untergrund (Leptonen aus Zerfällen der relativ langlebigen Pionen, Kaonen und Hyperonen, Dalitzpaare, Konversion von Photonen im Apparat) kurz diskutiert.

Verhältnis $\left(\frac{\ell}{\pi}\right)$ bei verschiedenen Energien zusammengestellt. Eine detaillierte Analyse der Leptonproduktion durch die bekannten Vektormesonen zeigte, daß ρ , ω , ϕ und ψ allein für eine vollständige Erklärung der beobachteten Verhältnisse $\frac{\ell}{\pi}$ in der Größenordnung von 10^{-4} nicht ausreichen [47]. In [5] wird eine Abschätzung von Pennsylvania-Stony Brook erwähnt, die für $p_{\text{Lab}} = 15 \text{ GeV/c}$ und $1.0 \leq p_T \leq 1.2 \text{ GeV/c}$ ein Verhältnis $\frac{\ell^+}{\pi^+}$ von etwa $3 \cdot 10^{-5}$ ergab.

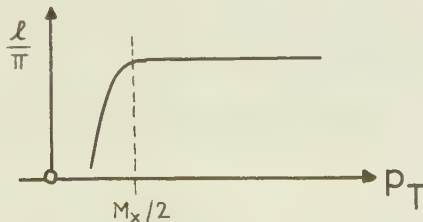
Es liegt natürlich nahe, den Ursprung der zusätzlichen Leptonen bei noch unentdeckten Teilchen (Hadronen mit Charm ?) zu suchen. Mit vernünftigen Annahmen über deren Produktion und anschließenden leptonenischen Zerfall



kann man die Leptonraten bei hohen Transversalimpulsen ($p_T \gg 1 \text{ GeV}$), wo $\frac{\ell}{\pi}$ flach ist, erklären. Diese Interpretation gerät jedoch möglicherweise in Schwierigkeiten bei kleinen p_T . Neue Daten vom CERN-ISR bei $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$ und $\theta = 30^\circ$ im pp-Schwerpunktsystem [7] (Figur (2-2)) zeigen nämlich einen deutlichen Anstieg in $\frac{\ell}{\pi}$ von $\sim 10^{-4}$ bei $p_T \approx 1 \text{ GeV/c}$ auf $6 \cdot 10^{-4}$ bei $p_T \approx 0.2 \text{ GeV/c}$. Im Gegensatz dazu fallen die invarianten Spektren von Leptonen, die nach (2.1) erzeugt werden, für $p_T \leq \frac{M_X}{2}$ ab:



und entsprechend $\frac{\ell}{\pi}$, falls die Transversalimpulsverteilungen von X und π ähnlich sind [5]:



Folglich ist man gezwungen, entweder ein sehr leichtes Teilchen ($M_X \leq M_\pi$) zu postulieren oder ein großes Verzweungsverhältnis in einen speziellen Dreiteilchenkanal anzunehmen, wenigstens wenn man an der Deutung der überzähligen Leptonen als Zerfallsprodukte eines einzigen Mutterteilchens im gesamten E_T -Intervall festhält. Die Kurven in Figur (2-1) resultieren zum Beispiel aus einem Modell, in dem ein geladenes Elternteilchen $X^\pm$ mit einer Masse $m_X \leq M_X \leq 5 m_\pi$ und pionartiger Produktion als Leptonquelle:

$$X^\pm \rightarrow \begin{cases} e^\pm \nu_e \\ \mu^\pm \nu_\mu \end{cases}$$

vorgeschlagen wird [5]. Figur (2-3) aus [45] illustriert, wie ein, zusammen mit den Leptonen produziertes, schweres Hadron H:

$$X \rightarrow H e \nu_e,$$

das einen Großteil der verfügbaren Energie mitnimmt, die Schwelle in $\frac{1}{\pi}$ zu kleineren p_T verschiebt. In den Daten fehlt jedoch offensichtlich eine derartige Schwelle oberhalb $p_T \approx 0.2 \text{ GeV/c}$ vollständig.

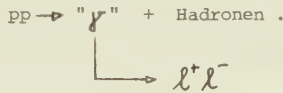
Eine natürliche Erklärung würde diese Tatsache finden, wenn die Leptonen von einem Kontinuum virtueller Photonen stammen. Während für harte Photonen ad hoc-Annahmen über die Dynamik der Photonproduktion unumgänglich sind^{x)}, existiert für weiche, virtuelle Photonen ein, in gewisser Hinsicht modellunabhängiger, Infrarot-Limes. Weich bedeutet in diesem Zusammenhang: niedrige Masse (q^2) und kleine Energie (q_0)^{xx)}. Solche Photonen sollten sich ähnlich wie die weichen, reellen Photonen verhalten. Ist das richtig, dann könnte der infrarote Anstieg der Photonrate (für $q_0 \rightarrow 0$) zusammen mit einer weiteren Erhöhung für $q^2 \rightarrow 0$ vom Photonpropagator her, zu einer beträchtlichen Leptonproduktion führen.

^{x)} In der Literatur findet man verschiedene Modelle dieser Art (nur als Beispiele [49-51]). In [51] begründet man das zur Erklärung der Daten bei hohen p_T erforderliche große Photon-Pion-Verhältnis mit einer Abnahme der hadronischen Kopplungsstärke relativ zur elektromagnetischen: $\alpha/g \sim O(10^{-1})$ bei kleinen Abständen. Die Form des Photonspektrums wird pionartig angesetzt.

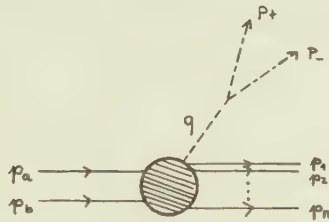
^{xx)} Um zu betonen, daß wir in diesem Abschnitt von virtuellen Photonen sprechen, bezeichnen wir den Photonimpuls mit q , anstelle von k (wie im Rest der Arbeit).

Wir untersuchen deshalb unter obiger Annahme den Beitrag von der inneren Konversion der weichen, virtuellen Bremsstrahlung zu den niederenergetischen Leptonen. Es wird gezeigt, daß das resultierende Elektron-Pion-Verhältnis bei kleinen p_T sowohl größenordnungsmäßig, als auch der Form nach dem gemessenen [7] ähnlich ist. Darüber hinaus machen wir Vorhersagen über $\frac{\mu}{\pi}$ und über die Leptonenspektren in Vorwärtsrichtung ($\theta = 0^\circ$) für sehr kleine x ($x < 0.05$).

2.2 Die grundlegende Größe in unserem Bild, aus der das inklusive Einleptonenspektrum berechnet werden kann, ist das Leptonpaar-Spektrum, bzw. das inklusive, virtuelle Photonspektrum der Reaktion:



Wir übernehmen entsprechend dem Graphen:



die von der tiefinelastischen eN-Streuung her bekannte Darstellung als Produkt des leptonischen Tensors ($q = p_+ + p_-$):

$$m^{\mu\nu} = \sum_{\text{spin}} \langle \bar{u}(p_-) \gamma^\mu v(p_+) \rangle \langle \bar{v}(p_+) \gamma^\nu u(p_-) \rangle \quad (2.1)$$

$$= -2g^{\mu\nu}q^2 + 4(p_+^\mu p_-^\nu + p_-^\mu p_+^\nu)$$

und des entsprechenden hadronischen Tensors:

$$W_{\mu\nu} \sim \sum_{\text{Spin}} \sum_n \left| \text{Diagram} \right|^2 \sim \text{Diagram} \quad (2.2)$$

$$\sim \sum_{\text{Spin}} \sum_n \langle P_a P_b | j_\mu(0) | n \rangle \langle n | j_\nu(0) | P_a P_b \rangle (2\pi)^4 \delta(P_a + P_b - P_n - q).$$

$$E_+ E_- \frac{d\sigma^{l^+l^-}}{d^3p_+ d^3p_-} = \left(\frac{\alpha}{4\pi^2} \right)^2 \frac{W_{\mu\nu} m^{\mu\nu}}{q^4}. \quad (2.3)$$

$\sum_{\text{Pol}} W_{\mu\nu} \varepsilon^\mu(q) \varepsilon^\nu(q)$ ist demnach bis auf einen Zahlenfaktor das inklusive, virtuelle Photonspektrum, eine im allgemeinen äußerst komplizierte Größe, die jedoch für $q^2 = 0$ offensichtlich durch das reelle Photonspektrum II(2.7) bestimmt ist:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{4\pi^2} \sum_{\text{Pol}} W_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu \right) = q_0 \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3q}. \quad (2.4)$$

Wir denken uns nun $\sum_{\text{Pol}} W_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu$ um $q^2 = 0$ herum entwickelt und nehmen an, daß der erste Term, eben (2.4), auch für kleine $q^2 > 0$ eine zufriedenstellende Approximation darstellt. Effektiv vernachlässigen wir damit jede dynamische q^2 -Abhängigkeit (Formfaktoren). Wenn wir jetzt auch noch konsistenterweise den Beitrag von der Klammer in $m^{\mu\nu}$ weglassen, der an der Schwelle $q^2 = 4 m_l^2$ ($\simeq 0$, wenigstens für Elektronen) verschwindet, folgt aus (2.3):

$$E_+ E_- \frac{d\sigma^{l^+l^-}}{d^3p_+ d^3p_-} \simeq \frac{\alpha}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot \left(q_0 \frac{d\sigma^{\gamma}}{d^3q} \right). \quad (2.5)$$

Für kleine Photonenergien q_0 brauchen wir nur noch das im III. Kapitel abgeleitete Bremsstrahlungsspektrum (III.6) einzusetzen. Vorher aber eine Bemerkung zu einer Unbestimmtheit, die bei der Extrapolation auf virtuelle Photonen auftritt. q_{T}^2 ist

für reelle Photonen sowohl gleich $|\vec{q}|^2 - q_L^2$, als auch gleich $q_0^2 - q_L^2$ (analog gilt bei $\theta = 0^\circ$: $x^2 = \frac{4q_L^2}{s} = \frac{4|\vec{q}|^2}{s} = \frac{4q_0^2}{s}$). Für virtuelle Photonen müssen wir uns für eine von beiden Möglichkeiten entscheiden. Da die simplen Feynmangraphen für $q_0 \frac{d\sigma^p}{d^3q}$ primär auf $\frac{1}{q_0^2 - q_L^2} = \frac{1}{q^2 + q_T^2}$ (bzw. $\frac{1}{q_0^2} = \frac{1}{q^2 + |\vec{q}|^2}$ bei $\theta_{cm} = 0^\circ$) führen, interpretieren wir q_T und x in III (5.8) und (5.19) in diesem Sinne, so daß wir schließlich zu folgendem expliziten Leptonpaarspektrum gelangen^{x)}:

$$\frac{E_+ E_-}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^{l^+l^-}}{d^3p_+ d^3p_-} \simeq \frac{\alpha}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{q^2} \begin{cases} C & \text{für große } \theta \\ \frac{C_0}{4q_0^2/5} & \text{für } \theta = 0^\circ \end{cases} \quad (2.6)$$

Die hadronischen Parameter C und C_0 sind in III(5.8) und (5.19) definiert.

2.3 Um das Einleptonenspektrum zu erhalten, muß über einen Leptonimpuls oder, was auf dasselbe hinausläuft, über den Photonimpuls q integriert werden:

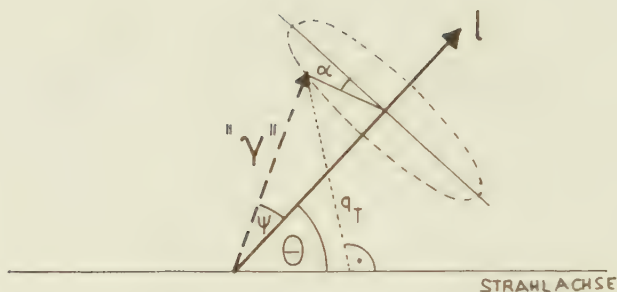
$$E \frac{d\sigma^l}{d^3p} = \frac{\alpha}{2\pi^2} \int \frac{dq^2}{q^2} \int \left(q_0 \frac{d\sigma^p}{d^3q} \right) \delta(q^2 - 2pq) \Theta(q_0 - E) \frac{d^3q}{q_0} \quad (2.7)$$

Die δ -Funktion beschreibt die Leptonverteilung bei festgehaltenem Photonimpuls^{xx)}. Obwohl (2.6) nur für kleine q_0 gilt, integrieren wir etwas verwegen über das gesamte, kinematisch erlaubte Energieintervall. Da das Ergebnis endlich ist und die Hauptbeiträge von q_0 nahe bei E kommen, machen wir vermutlich keinen ersten Fehler, solange E klein ist. $E \ll$ wenige hundert MeV halten wir für eine vernünftige Schätzung. Für die q^2 -Integration muß jedoch eine obere Grenze eingeführt werden. Gemäß der Beschränkung auf kleine q^2 wählen wir $\sqrt{q_{\max}^2} = 300$ MeV, wobei der genaue Zahlenwert eine unwesentliche Rolle spielt, da das Ergebnis nur logarithmisch von diesem Abschneideparameter abhängt.

Bezogen auf die Richtung des beobachteten Leptons im pp-Schwerpunktsystem:

x) Formal entspricht dieses Ergebnis der Approximation $W_{\mu\nu} \simeq \langle j_\mu j_\nu \rangle \cdot \sigma_{pp}$, wobei j_μ die klassische Stromverteilung für Punktladungen ist (siehe II(2.21)).

xx) Die entsprechende Formel für $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ist uns in (1.4) schon begegnet.



ist der Transversalimpuls des Photons gegeben durch:

$$q_T^2 = |\vec{q}|^2 \left((\cos \psi \frac{p_T}{|\vec{p}|} + \sin \psi \frac{p_L}{|\vec{p}|} \cos \alpha)^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \alpha \right). \quad (2.8)$$

ψ ist der Winkel zwischen Photon und Lepton, α der Azimutalwinkel des Photons um die Leptonrichtung (von der durch Lepton und Strahlachse aufgespannten Ebene aus gemessen) und p_L , p_T sind die Impulskomponenten des Leptons. Die δ -Funktion in (2.7) läßt sich durch Integration über ψ eliminieren:

$$E \frac{d\sigma^L}{d^3p} = \frac{\alpha}{4\pi^2 |\vec{p}|} \int_{\frac{q^2}{4m_e^2}}^{q_{\max}^2} \frac{dq^2}{q^2} \int_{\max(E_1, E_2)}^{\min(\frac{E_5}{2}, E_2)} dq_0 \int_0^{2\pi} d\alpha \left(q_0 \frac{d\sigma^L}{d^3q} \Big|_{\psi=\psi_0} \right), \quad (2.9)$$

wobei ψ_0 die Nullstelle des Arguments $q^2 - 2E q_0 + 2|\vec{p}| |\vec{q}| \cos \psi$ der δ -Funktion ist:

$$\psi_0 = \cos^{-1} \frac{2E q_0 - q^2}{2|\vec{p}| |\vec{q}|}, \quad (2.10)$$

und die Grenzen $E_{1,2} = \frac{q^2}{2m_e^2} \cdot (E \mp |\vec{p}| \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{q^2}})$ durch eine θ -Funktion bedingt werden, die garantiert, daß ψ_0 innerhalb des Integrationsintervalls $0 \leq \psi \leq \pi$ liegt. Die restlichen Integrationen sind nur noch für spezielle Fälle analytisch möglich.

Die führenden Terme erhält man jedoch leicht, wenn man den Winkel ψ zwischen Lepton und Photon vernachlässigt (Approximation von Sternheimer [46], vgl. (1.5)).

$$E \left. \frac{d\sigma^L}{d^3p} \right|_{\theta} \approx \frac{\alpha}{2\pi E} \int_{\frac{4m_e^2}{E}}^{q_{\max}^2} \frac{dq^2}{q^2} \int_{E+\frac{q^2}{4E}}^{\sqrt{s}/2} dq_0 \left(q_0 \left. \frac{d\sigma^r}{d^3q} \right|_{\theta} \right). \quad (2.11)$$

Mit (2.6) folgt daraus für $\theta = 90^\circ$:

$$\frac{E}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^L}{d^3p} \approx \frac{\alpha C}{2\pi E^2} \left(\ln \frac{q_{\max}^2}{4m_e^2} - R \right) \quad (2.12)$$

und für $\theta = 0^\circ$:

$$\frac{E}{\sigma_{pp}} \frac{d\sigma^L}{d^3p} \approx \frac{\alpha C_0}{2\pi \cdot 4E^{3/2}} \left(\ln \frac{q_{\max}^2}{4m_e^2} - R \right), \quad (2.13)$$

wobei $R = \ln \frac{1 + q_{\max}^2/4E^2}{1 + m_e^2/E^2}$. Diese Spektren sind in Figur (2-4) als punktierte Kurven dargestellt:

- A) $\theta = 90^\circ$ ($\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$; $C = 1.26 \cdot 10^{-3}$)
 B) $\theta = 0^\circ$ ($\sqrt{s} = 27.4 \text{ GeV}$; $C_0 = 0.22 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}^{-2}$).

Wie schon im letzten Abschnitt erwähnt, ist diese Näherung nur dann gerechtfertigt, wenn die Masse des Mutterteilchens sehr viel kleiner als die Energie des erzeugten Teilchens ist ($\frac{q^2}{E^2} \ll 1$, [46]). Für $4m_e^2 \leq q^2 \leq (300 \text{ MeV})^2$ und $100 \lesssim E \lesssim 500 \text{ MeV}$ erfüllen die Elektronen diese Voraussetzung in einem großen Teil des Integrationsgebietes, während für Müonen wegen ihrer vergleichsweise großen Masse $\frac{q^2}{E^2} \approx O(1)$ gilt. Um wirklich sicher zu gehen, haben wir auch das (numerisch) exakte Ergebnis ausgerechnet. Für $\theta = 90^\circ$, bzw. $\theta = 0^\circ$ vereinfacht sich (2.8) zu

$$q_T^2 = |\vec{q}|^2 (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \sin^2 \alpha), \quad (2.14)$$

bzw. $q_T^2 = |\vec{q}|^2 \sin^2 \psi,$

so daß man alle Integrationen bis auf das Integral über q^2 analytisch ausführen kann. Man erhält^x:

$$\begin{aligned} \text{x) } \max(E, E_1) &= E_1; \\ \min\left(\frac{\sqrt{s}}{2}, E_2\right) &= \begin{cases} E_2 & \text{für } q^2 \lesssim \sqrt{s} (E-p) \\ \frac{\sqrt{s}}{2} & \text{für } q^2 \gtrsim \sqrt{s} (E-p) \end{cases} \end{aligned}$$

$E_2 \gtrsim \frac{\sqrt{s}}{2}$ kann für $q^2 \lesssim (300 \text{ MeV})^2$ nur im Elektronfall auftreten.

$$\frac{E}{\sigma_{FP}} \frac{d\sigma^l}{d^3p} = \frac{\alpha C}{2\pi E} \int_{4m_e^2}^{q_{\max}^2} \frac{dq^2}{q^2} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\frac{2\sqrt{a(q_0^2 + b q_0 + a)}}{q_0} + \frac{2a}{q_0} + b \right) \bigg|_{q_0 = \max(E, E_1)}^{q_0 = \min(\frac{E}{2}, E_2)}$$

mit $a = \frac{q^2}{4E^2} (4|\vec{p}|^2 + q^2)$, $b = -\frac{q^2}{E}$ für $\theta = 90^\circ$ (2.15)

und

$$\frac{E}{\sigma_{FP}} \frac{d\sigma^l}{d^3p} = \frac{\alpha C_0}{2\pi \cdot 4|\vec{p}|/s} \int_{4m_e^2}^{q_{\max}^2} \frac{dq^2}{q^2} \left(\frac{1}{\max(E, E_1)} - \frac{1}{\min(\frac{E}{2}, E_2)} \right) \text{ für } \theta = 0^\circ.$$

Die ausgezogenen Kurven in Figur (2-4) resultieren aus der noch verbleibenden numerischen Integration. Die Müonrate fällt also um etwa einen Faktor $\frac{1}{2}$ gegenüber der Näherung (2.11), während die Elektronrate praktisch unverändert bleibt.

Das wiederum bestätigt, daß zur Müonrate bei einem bestimmten Winkel θ Photonen aus einem relativ weiten Winkelbereich um θ beitragen. Den größten Effekt hat diese Tatsache offensichtlich bei $\theta = 0^\circ$, da das Photonspektrum bei fester Energie dort rasch mit wachsendem θ abfällt (Figur (1-1)). Folglich war die vorherige Rechnung für $\theta = 0^\circ$, wo wir für das Photonspektrum einfach den Wert bei exakt $\theta = 0^\circ$ (III(5.19)) eingesetzt haben, nicht ganz richtig. Eine gewisse Verbesserung erreichen wir sicher, wenn wir statt dessen das interpolierte Spektrum (1.1) verwenden. (2.9) führt in diesem Fall auf:

$$\frac{E}{\sigma_{FP}} \frac{d\sigma^l}{d^3p} = \frac{\alpha C}{2\pi |\vec{p}|} \int_{4m_e^2}^{q_{\max}^2} \frac{dq^2}{q^2} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2a q_0 + b - \sqrt{-\Delta}}{2a q_0 + b + \sqrt{-\Delta}} \bigg|_{q_0 = \max(E, E_1)}^{q_0 = \min(\frac{E}{2}, E_2)}$$

(2.16)

mit $a = \frac{4C}{s c_0} - \frac{(1 - \frac{4C}{s c_0}) m_e^2}{|\vec{p}|^2}$,

$$b = \left(1 - \frac{4C}{s c_0}\right) \frac{E}{|\vec{p}|^2} q^2,$$

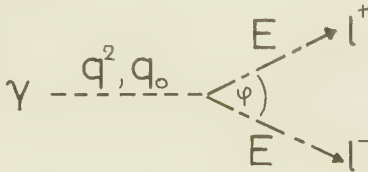
$$c = -q^2 \left(1 + \left(1 - \frac{4C}{s c_0}\right) \frac{q^2}{4|\vec{p}|^2}\right) \text{ und } \Delta = 4ac - b^2.$$

Die gestrichelt-punktierten Kurven in Figur (2-4)B zeigen das Ergebnis einer numerischen Integration von (2.16). Wie erwartet, verringert sich die Müonrate vor allem bei kleinen x , wo die Öffnungswinkel zwischen Müon und Photon besonders groß sind. Die Änderung des Elektronspektrums ist wieder relativ gering.

Um die Abhängigkeit der Leptonspektren von der willkürlich gewählten Grenze in der Photonmasse zu demonstrieren, haben wir in (2.15) für $\theta = 90^\circ$ auch noch den Parameter $q_{\max}^2$ variiert. Die gestrichelten Kurven in Figur (2-4)A entsprechen $\sqrt{q_{\max}^2} = 150 \text{ MeV}$ für Elektronen und $\sqrt{q_{\max}^2} = 500 \text{ MeV}$ für Müonen.

Alle diese Rechnungen zeigen, daß die Müonspektren viel stärker von den Details unserer Annahme abhängen als die Elektronspektren. Das ist nicht anders zu erwarten, weil bei diesen niedrigen Energien ($E \leq 500 \text{ MeV}$) die Müonmasse eine erhebliche Rolle spielt, die Elektronmasse aber immer noch vernachlässigbar ist. Aber abgesehen davon sind zur Erzeugung von Müonpaaren Photonen mit relativ hoher Masse und Energie nötig, so daß man, unserer Meinung nach, in diesem Fall der gesamten Infrarot-Näherung nur qualitativ trauen darf.

2.4 Ein ernsthafter Vergleich mit Daten ist auf dieser Stufe nicht möglich, da wir noch keinerlei experimentelle Schnitte (kinematische Bedingungen beim Experiment selbst) berücksichtigt haben. Wir erwarten jedoch, daß z.B. die Forderung eines minimalen Öffnungswinkels der Leptonen unsere Leptonraten (zumindest die Elektronraten) nicht zwangsläufig größenordnungsmäßig reduzieren wird, da bei niedrigen Energien auch Photonen mit kleiner Masse zu großen Öffnungswinkeln φ führen können. Man überlegt sich leicht, daß φ für symmetrische Leptonpaare:



am kleinsten ist: $\varphi_{\min} = 2 \sin^{-1} \frac{\sqrt{q^2}}{E}$. Fordern wir nun z.B. $\varphi_{\min} \geq 10^\circ$, so ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \sqrt{q^2} &\geq .009 \text{ GeV} \quad \text{für } E = .1 \text{ GeV} \\ \sqrt{q^2} &\geq .045 \text{ GeV} \quad \text{für } E = .5 \text{ GeV} . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Für Elektronen läßt sich der entsprechende Reduktionsfaktor mit Hilfe von (2.12) leicht ausrechnen. Wir müssen nur $4m_e^2$ durch die beiden unteren Grenzen (2.17) ersetzen:

$$\frac{E(\psi \geq 10^\circ)}{E(\text{total})} \approx \frac{\ln \frac{q_{\max}^2}{q_{\min}^2} - R(q_{\min}^2)}{\ln \frac{q_{\max}^2}{4m_e^2} - R(4m_e^2)} \quad (2.18)$$

$$\approx \begin{cases} 0.57 & \text{für } E = 0.1 \text{ GeV} \\ 0.33 & \text{für } E = 0.5 \text{ GeV} \end{cases}$$

Man verliert also grob die Hälfte der Elektronen.

Figur (2-5)a zeigt das Lepton-Pion-Verhältnis für $\theta = 30^\circ$ und $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$. Die Leptonspektren sind in der Sternheimer-Näherung (wie die punktierten Kurven in Figur (2-4)a) berechnet worden. Man erhält in diesem Fall ein etwas komplizierteres Ergebnis:

$$\frac{E}{\sigma_{\pi}} \frac{d\sigma^l}{d^3p} = \frac{\alpha G}{\pi E \sin 2\theta} \int_{4m_e^2}^{q_{\max}^2} \frac{dq^2}{q^2 \sqrt{q^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{E + \frac{q^2}{4E}}{\sqrt{q^2} \cot \theta} \right), \quad (2.18)$$

das wir numerisch ausgewertet haben. Zur Normierung auf das Pionspektrum

$\pi = \frac{1}{2} (\pi^+ + \pi^-)$ verwenden wir einen von B. Alpen et al. [1] angegebenen Fit für $\theta = 30^\circ$ und $\sqrt{s} = 52.8 \text{ GeV}$:

$$\pi^\pm = A^\pm e^{B^\pm p_T + C^\pm p_T^2}$$

mit

$$\begin{aligned} A^+ &= 197 \text{ mb GeV}^{-2} \text{ c}^3 \\ A^- &= 196 \text{ mb GeV}^{-2} \text{ c}^3 \\ B^+ &= -8.1 \text{ GeV}^{-1} \text{ c} \\ B^- &= -7.5 \text{ GeV}^{-1} \text{ c} \\ C^+ &= 2.8 \text{ GeV}^{-2} \text{ c}^2 \\ C^- &= 0.8 \text{ GeV}^{-2} \text{ c}^2 \end{aligned}$$

und für den inelastischen pp-Wirkungsquerschnitt den Wert: $\sigma_{pp} = 35.6 \text{ mb}$ [53]. In Figur (2-5)b wurden einige Daten für $\frac{e}{\pi}$ von [7] samt einer Abschätzung des Beitrages vom ϱ -, ω - und ψ -Zerfall reproduziert. Ein Vergleich zeigt, daß unser Ergebnis für $\frac{e}{\pi}$ in der richtigen Größenordnung liegt und auch von der Form her den Daten ähnlich ist.

Die Tatsache, daß $\frac{e}{\pi}$ für $p_T \gtrsim 300 \text{ MeV}$ und $\frac{\mu}{\pi}$ für $p_T \gtrsim 200 \text{ MeV}$ wieder ansteigen, liefert vielleicht einen Hinweis auf die Gültigkeitsgrenze unserer Beschreibung. Jedenfalls entspräche eine solche Grenze etwa unserer Erwartung. Es ist auch vernünftig, daß sie für Müonen etwa um die der Masse entsprechenden Energie niedriger liegt als für Elektronen. Der formale Grund für diesen Anstieg liegt darin, daß die Pionspektren von diesen Transversalimpulsen an schneller abfallen als die Leptonspektren.

2.5 Wir ziehen folgende Schlüsse aus unserer Untersuchung:

- (1) Die weiche, virtuelle Bremsstrahlung ist eine ertragreiche Quelle für Leptonen mit niedrigen Energien ($E \lesssim 500 \text{ MeV}$).
- (2) Die Elektronrate ist viel größer als die Müonrate: $\frac{e}{\mu} \gtrsim 30$.
- (3) Beide zeigen einen bemerkenswerten Anstieg bei sehr kleinen x in Vorwärtsrichtung ($\theta = 0^\circ$).
- (4) $\frac{e}{\pi}$ steigt zu kleinen p_T hin ($p_T \lesssim 300 \text{ MeV}$) rasch an, während $\frac{\mu}{\pi}$ ziemlich flach bleibt.

Auch wenn sich herausstellen sollte, daß unsere Quelle allein die beobachteten Leptonraten bei kleinen Energien nicht liefern kann, so muß man sie sicher in der Datenanalyse berücksichtigen. Weitere Messungen bei noch kleineren Energien (vor allem auch für Müonen) und eine Bestimmung des Leptonpaarspektrums bei niedrigen invarianten Massen würden einen klaren Test unseres Modells ermöglichen.

Literaturverzeichnis

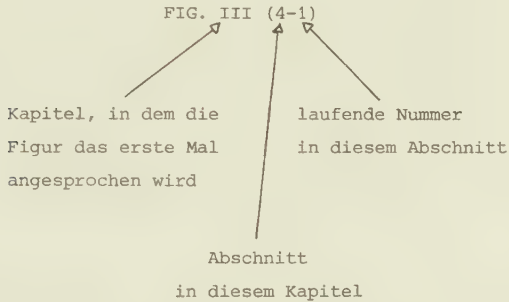
- [1] J.M. Jauch und F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons (Addison-Wesley Publ. Comp., Cambridge, 1955).
- [2] D. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343.
- [3] S.R. Choudhury und P. Rotelli, Nucl. Phys. B 56 (1973) 589.
- [4] R.N. Cahn, a) Phys. Rev. Lett. 29 (1972) 1481; b) Phys. Rev. D 7 (1973) 247.
- [5] L.M. Lederman, Proc. Intern. Symp. on Lepton and Photon Interactions, Stanford (1975).
- [6] R.H. Dalitz, Proc. Phys. Soc. A 64 (1951) 667.
- [7] L. Baum et al., Phys. Lett. 60 B (1976) 485.
- [8] R.J. Eden et al., The Analytic S-Matrix (Cambridge University Press, 1966).
- [9] S. Gasiorowicz, Elementary Particle Physics (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967).
- [10] A.H. Mueller, Phys. Rev. D 2 (1970) 2963.
- [11] W.R. Frazer et al., Rev. Mod. Phys. 44 (1972) 284.
- [12] N. Schmitz, Acta Phys. Pol. B 4 (1973) 689.
- [13] A. Bialas, Proc. 4. Intern. Symp. on Multiparticle Hadron Dynamics, Pavia (1973).
- [14] M.L. Perl, High Energy Hadron Physics (J. Wiley & Sons, Inc., New York, 1974).
- [15] J. Whitmore, Phys. Rep. 10 C (1974).
- [16] L. Foà, Phys. Rep. 22 C (1975).
- [17] M. Banner et al., Phys. Lett. 41 B (1972) 547.
- [18] J. Ranft, Fortschr. Phys. 23 (1975) 467.
- [19] T. Ferbel, Proc. SLAC Summer Institute on Particle Physics, Stanford (1974).
- [20] T. Ferbel, private Mitteilung.

- [21] B. Schwarzschild, Bonn-Hamburg-München Collaboration, Study of Cluster Production via Charge Transfer Measurement in pp Reactions, Max-Planck-Institut für Physik, München (1975), nicht veröffentlicht.
- [22] P. Bosetti et al., Nucl. Phys. B 62 (1973) 46.
- [23] P. Rotelli, Phys. Rev. D 7 (1973) 230.
- [24] T.T. Chou und C.N. Yang, Phys. Rev. D 7 (1973) 1425.
- [25] C. Quigg und G.H. Thomas, Phys. Rev. D 7 (1973) 2752.
- [26] K. Fialkowski, Max-Planck-Inst. für Physik, München (1973), nicht veröffentlicht.
- [27] A. Bialas et al., Acta Phys. Pol. B 6 (1975) 59.
- [28] J.D.Bjorken und S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics (Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1964).
- [29] S. Weinberg, Phys. Rev. 140 (1965) B 516.
- [30] D.R. Yennie, S.C. Frautschi und H. Suura, Ann. Phys. 13 (1961) 379.
- [31] F.E. Low, Phys. Rev. 110 (1958) 974.
- [32] S.L. Adler und Y. Dothan, Phys. Rev. 151 (1966) 1267.
- [33] V.N. Gribov, Sov. J. Nucl. Phys. 5 (1967) 280.
- [34] E.M. Nyman, Phys. Rev. 170 (1968) 1628.
- [35] E.M. Nyman, Phys. Rep. 9 C (1974) 179.
- [36] D.I. Sober et al., Phys. Rev. D 11 (1975) 1017.
- [37] R.J. Glauber, Phys. Rev. 84 (1951) 395.
- [38] J.D.Bjorken und S.D. Drell, Relativistic Quantum Fields (McGraw-Hill Book Co., New York, 1965).
- [39] R.P. Feynman, in High Energy Collisions, herausgegeben von C.N. Yang et al. (Gordon and Breach, New York, 1969).
- [40] V. Blobel et al., Nucl. Phys. B 69 (1974) 454.
- [41] W. Ochs, CALTECH preprint, CALT-68-542 (1976).
- [42] W. Geist, Bonn-Hamburg-München Collaboration, private Mitteilung.

- [43] A.M. Rossi et al., Nucl. Phys. B 84 (1975) 269.
- [44] M. Fidecaro et al., Nuovo Cim. 24 (1962) 73.
- [45] G. Neuhofer et al., a) Phys. Lett. 37 B (1971) 438; b) Phys. Lett. 38 B (1972) 51.
- [46] R.M. Sternheimer, Phys. Rev. 99 (1955) 277.
- [47] M. Bourquin und J.-M. Gaillard, Phys. Lett. 59 B (1975) 191.
- [48] H. Hinchliffe und C.H. Llewellyn Smith, preprint 23/76, Universität Oxford (1976).
- [49] S.M. Berman, D.J. Levy und T.L. Neff, Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 1363.
- [50] S.D. Drell und T.-M. Yan, Phys. Rev. Lett. 25 (1970) 316.
- [51] G.R. Farrar und S.C. Frautschi, CALTECH preprint CALT 68-518 (1976).
- [52] B. Alper et al., Phys. Lett. 47 B (1973) 75.
- [53] U. Amaldi et al., Phys. Lett. 44 B (1973) 112.

Erklärungen zu den Figuren:

Die Kennzeichnung der Figuren ist an folgendem Beispiel erklärt:



Die Kapitelnummer geben wir nur dann an, wenn wir auf eine Figur aus einem anderen Kapitel verweisen. Dasselbe gilt auch für die Kennzeichnung der mathematischen Formeln.

- Fig. II (1-1) Wirkungsquerschnitte für inelastische Hadronreaktionen im Energiebereich $2 \leq p_{\text{Lab}} \leq 1800 \text{ GeV/c}$:
- A) totale Wirkungsquerschnitte (aus [14]).
 - B) elastische und inelastische Wirkungsquerschnitte (aus [15]).
- Fig. II (1-2) Inklusive 1-Teilchenspektren in pp-Reaktionen bei ISR-Energien ($23 \leq \sqrt{s} \leq 53 \text{ GeV}$):
- A) Rapidityverteilungen bei festem Transversalimpuls:
 $p_T = 0.4 \text{ GeV/c}$ (aus [16]).
Die Spektren sind gegen die Rapidity im Laborsystem (Y_{Lab}) aufgetragen, die sich von der Rapidity im pp-Schwerpunktsystem (Y) gerade um den Betrag, der der relativen Geschwin-

digkeit beider Systeme entspricht ($Y_{\max} = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{m^2}$, siehe II (1.9)), unterscheidet. Außerdem ist nur eine Hälfte der Spektren, die symmetrisch um $Y_{\text{Lab}} = Y_{\max}$ sind, gezeigt. Es ist schön zu sehen, wie das Zentralgebiet ($Y_{\text{Lab}} \gtrsim 1$) proportional zu $\ln s$ wächst.

B) Transversalimpulsverteilungen für festen Winkel:

$$x = \frac{2p_T}{\sqrt{s}} = 0 \hat{=} \Theta = 90^\circ \quad (\text{aus [17]}) .$$

Die dicken schwarzen Punkte sind Daten bei einer viel geringeren Energie ($\sqrt{s} = 6.8 \text{ GeV}$) und demonstrieren, daß der exponentielle Abfall mit wachsendem p_T kaum von der Gesamtenergie $\sqrt{s}$ abhängt.

Fig. II (1-3) Korrelationsfunktion $R_{cd}(y, y')$ - definiert in II (1.10) - für verschiedene Ladungskombinationen: $cd = ++, --, +-, chch$:

A) Rapiditätsverteilungen für pp-Streuung bei $p_{\text{Lab}} = 400 \text{ GeV/c}$ (aus [16]).

Man sieht im Zentralgebiet (kleine y_c und y_d) deutlich die Streckung entlang den Achsen für feste $\Delta y = y_c - y_d$.

B) Energieabhängigkeit von $R_{cd}(0,0)$ (aus [18]).

Die Punkte bei $p_{\text{Lab}} = 16$, bzw. 40 GeV/c sind π^-p -Daten, alle anderen pp-Daten.

Fig. II (1-4) Azimuthalkorrelationen für gleich- und verschieden geladene Pionpaare in pp-Reaktionen bei FNAL-Energien:

A) Asymmetrieparameter A_ϕ - definiert in II (1.11) - für $p_{\text{Lab}} = 102$ und 400 GeV/c in Abhängigkeit von $|\Delta y| = |y - y'|$, $|\Delta p_T| = |p_T - p_T'|$ und $|\Sigma p_T| = \frac{1}{2}(p_T + p_T')$ (aus [19]).

Aus der 2. und 3. Abbildung geht klar hervor, daß A_ϕ nur für $|\Delta y| \lesssim 1$ und $|\Delta p_T| \lesssim 0.3 \text{ GeV/c}$ von der Ladung der Pionen abhängt.

B) Verteilung des Azimuthalwinkels $\phi = \cos^{-1}(\vec{p}_T \vec{p}_T' / |\vec{p}_T| |\vec{p}_T'|)$ für verschiedene $|\Delta y|$ -Intervalle und $p_{\text{Lab}} = 102 \text{ GeV/c}$ (aus [15]).

Es wurden nur Ereignisse mit mindestens 6 geladenen Hadronen akzeptiert. Die Protonen ("leading particles") wurden subtrahiert. Die gestrichelten Kurven sind das Ergebnis eines Modells, das in [15] näher beschrieben ist. Für verschiedenen geladene Pionpaare sieht man eindeutig positive Korrelationen bei $\phi = 180^\circ$ und negative für $\phi = 0^\circ$.

Fig. II (1-5) Ladungsdichte $\rho_+(y) - \rho_-(y)$ bei verschiedenen Laborenergien (aus [18]):

Die sich mit wachsender Energie trennenden Peaks enthalten jeweils eine Protonladung:

$$\int_0^{Y_{\max}} (\rho_+(y) - \rho_-(y)) dy = 1.$$

Fig. II (1-6) Ladungstransfer in der Rapidität:

A) mittlerer und mittlerer, quadratischer Ladungstransfer in pp-Reaktionen, gemessen in Blaskammerexperimenten bei

$p_{\text{Lab}} = 24, 102$ und 400 GeV/c.

Wir haben die Daten aus [20] und [21] zusammengestellt.

Die Pfeile bezeichnen die Grenzen der kinematisch möglichen

Rapiditätsintervalle ($Y_{\max} = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{m_p^2}$). Die Tatsache,

daß $\langle \Delta(y) \rangle$ mit wachsender Energie im Zentralgebiet verschwindet, reflektiert das Auseinanderrücken der Peaks in

Fig. II (1-5). Das mittlere Quadrat $\langle \Delta^2 \rangle$ ist etwa 1 im gesamten Rapiditätsintervall.

B) dasselbe für K^-p -Reaktionen bei $p_{\text{Lab}} = 10$ und 16 GeV/c

(aus [22]).

$\langle \Delta(y) \rangle$ sieht auf Grund der verschiedenen Anfangsladungen ganz anders aus als im pp-Fall, wird aber ebenfalls mit wachsender Energie im Zentralgebiet kleiner. $\langle \Delta^2(y) \rangle$ dagegen ist wieder nahezu konstant und gleich 1.

Fig. II (1-7) Dispersionen des Ladungstrfers - $D^2(y) = \langle \Delta^2(y) \rangle - \langle \Delta(y) \rangle^2$ - (aus Fig. II (1-6) berechnet):

Man wird stark an Einteilchenspektren erinnert. Tatsächlich liefert ein "Neutrales Cluster"-Modell [27]: $D^2(y) \sim \rho_n(y)$.

Fig. II (1-8) Energieabhängigkeit von $\langle \Delta^2(0) \rangle$. Die Daten stammen aus [20-22].

Fig. III (4-1) Photon-Verteilungsfunktionen im Restterm $R(\eta)$ (definiert in III (4.2)):

A) $f(y-\eta, p_T) - \epsilon(y-\eta)$

B) $g(y-\eta, p_T)$

als Funktion von $y - \eta$ bei festem Transversalimpuls p_T .
Der wesentliche Punkt ist die Lokalität um $y - \eta = 0$.

C) $b - (s_a - s_b)$ ist ein Beitrag von den kollidierenden Hadronen und verschwindet im Zentralbereich unabhängig von den Anfangsladungen total.

Fig. III (5-1) Photon-Verteilungsfunktionen in $R(\eta)$ (definiert in III (5.3)) gemittelt über die Transversalimpulse der Hadronen:

A) $\bar{f}(y-\eta) - \epsilon(y-\eta)$

B) $\bar{g}(y-\eta)$

Die Form ist dieselbe wie in Fig. III (4-1). Zusätzlich wollten wir hier das Wandern der Funktionen mit der Photonrapidität η , bzw. mit dem Photonwinkel Θ darstellen:

1 : $\Theta = 90^\circ$

2 : $\Theta = 70^\circ$

3 : $\Theta = 50^\circ$

4 : $\Theta = 30^\circ$

5 : $\Theta = 10^\circ$

C) $\bar{f}(y-\eta) \bar{f}(y'-\eta)$ und

$\bar{f}(y-\eta) \bar{f}(y'-\eta) - \epsilon(y-\eta) \epsilon(y'-\eta)$ für

$\eta = 0$ (d.h. $\Theta = 90^\circ$) und verschiedene Werte für y' als Funktion von y .

Für große y' ist $\bar{f}\bar{f}' - \epsilon\epsilon'$ lokal in y , für kleine y' dagegen ($y' = \pm 1$) nicht mehr.

Fig. III (5-2) Grobes Raster von $D[R](y, y')$ und $\bar{f}(y)\bar{f}(y') - 1$ in der (y, y') -Ebene (aus Fig. II (1-3) A und Fig. III (5-1) A abgelesen).

Fig. III (5-3) Weiches, inklusives Bremsstrahlungsspektrum für $\theta = 90^\circ$ und $p_{\text{Lab}} = 24$, bzw. 1500 GeV/c in Abhängigkeit vom Transversalimpuls k_T . (siehe III (5.8)).

Fig. III (5-4) Weiches, inklusives Bremsstrahlungsspektrum in Vorwärtsrichtung: $\theta = 0^\circ$ (siehe III (5.19)).

Fig. IV (1-1) Winkelverteilung der weichen Bremsstrahlung bei fester Photonenergie (siehe IV (1.2)):

Man sieht schön, wie sich mit wachsender Gesamtenergie $\sqrt{s}$ der Vorwärtsspeak ausbildet und die Verteilung bis zu immer kleineren Winkeln der asymptotischen Kurve $\sim \frac{1}{\sin^2\theta}$ folgt, die einem reinen $\frac{1}{k_T^2}$ -Verhalten des inklusiven Photonspektrums entspricht.

Fig. IV (1-2) Über den Raumwinkel gemittelte Energieverteilung der Bremsstrahlung (ausgezogene Kurve) verglichen mit Daten [44] für $\sqrt{s} = 6.7$ GeV:

Bei $\omega = 200$ MeV liegt der Bremsstrahlungsbeitrag noch um zwei Größenordnungen unter dem experimentellen Wert, steigt zu noch kleineren ω hin jedoch sehr rasch an. Die theoretische Kurve gibt das Ergebnis IV (1.3) wider.

Fig. IV (1-3) Vergleich von ISR-Daten [45] für das inklusive Photonspektrum für $\sqrt{s} = 44.7$ GeV und

- a) $\theta = 10^\circ$
- b) $\theta = 24^\circ$
- c) $\theta = 90^\circ$

mit den nach IV (1.1) berechneten Bremsstrahlungsspektren (gestrichelt) und dem Photonspektrum, das man aus dem π^0 -Zerfall

für eine π^0 -Verteilung der Form $E \frac{d^6 \pi^0}{d^3 p} \sim e^{-a p_T}$ ($a = 6 \text{ GeV}^{-1}$) erhält [4] (ausgezogen). Die exp. Photonrate bei $k_T \simeq 10 \text{ MeV/c}$ in a) enthält möglicherweise einen Bremsstrahlungsbeitrag (siehe Diskussion S. 69/70).

Fig. IV (2-1) Einige experimentelle Resultate für die Lepton-Pion-Verhältnisse (aus [5]):

Die Daten sind in [5] im Detail diskutiert. Da wir hier nur eine grobe Vorstellung von den experimentellen Fakten geben wollen, beschränken wir uns auf wenige Bemerkungen:

- a) zeigt mit Ausnahme von $\frac{\mu}{\pi}$ für $\theta = 0^\circ$ und $p_T = 0$ (nicht direkt gemessen, sondern Extrapolation) ISR-Daten für $\frac{e}{\pi}$;
- CCRS = CERN-COLUMBIA-ROCKEFELLER-SACLAY-COLLABORATION
- CHORM = CERN-HARVARD-OXFORD-RIVERSIDE-MUNICH-COLLABORATION.

Die CHORM-Daten haben sich inzwischen etwas geändert (siehe Fig. IV (2-2)).

- b) zeigt Daten bei niedrigeren Energien (angegeben sind die Laborenergien).

Die Verhältnisse scheinen bei hohen Transversalimpulsen flach zu werden und zu kleinen p_T hin anzusteigen. Sie liegen mit wenigen Ausnahmen in der Größenordnung von 10^{-4} bis 10^{-3} . Die einzelnen Experimente sind jedoch zum Teil nicht ohne weiteres vergleichbar, da sie bei verschiedenen Winkeln θ , d.h. verschiedenen X gemacht wurden. Die Kurven sind Fits für Leptonen aus dem Zerfall eines unbekannten Teilchens: $X^\pm \rightarrow l^\pm \nu_l$ mit kleiner Masse: $m_X \lesssim M_X \lesssim 5 m_\pi$ [5].

Fig. IV (2-2) Elektron-Pion-Verhältnis für $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$ und $\theta = 30^\circ$ im pp-Schwerpunktsystem bei kleinen Transversalimpulsen (aus [7]): Man beobachtet einen signifikanten Anstieg zu kleinen p_T hin, der keinesfalls vom Zerfall der Vektormesonen (ρ, ω, ψ ; nach [47]) verursacht werden kann.

Fig. IV (2-3) Vergleich von Daten für $\frac{e}{\pi}$ (ISR: $\theta = 90^\circ$ und $\theta = 30^\circ$, vgl. Fig. IV (2-1)) mit einem Modell, das auf verschiedenen 3-Teilchenzerfällen eines Mesons D mit Charm basiert [48]:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } D(M = 2.2) \longrightarrow Ke \nu \\ \text{b) } D(M = 1.8) \longrightarrow Ke \nu \\ \text{c) } D(M = 1.8) \longrightarrow K^* e \nu \end{array} \right\} + \varrho, \omega, \psi \text{-Beiträge}$$

Die beste Beschreibung der Daten erzielt man mit c), wo zusätzlich zu den Leptonen ein verhältnismäßig schweres Hadron ($M_{K^*} \approx 0.9 \text{ GeV}$) erzeugt wird. Für $p_T \lesssim 300 \text{ MeV}$ versagt aber auch dieser Erklärungsversuch.

Fig. IV (2-4) Invariante, inklusive Verteilungen von Leptonen, die durch innere Konversion weicher, virtueller Bremsstrahlung erzeugt wurden:

A) für $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$ und $\theta = 90^\circ$ in Abhängigkeit vom Transversalimpuls.

B) für $\sqrt{s} = 27.4 \text{ GeV}$ und $\theta = 0^\circ$ in Abhängigkeit von x .

Die verschiedenen Kurven sind im Text (IV (2.12, 13, 15, 16)) erklärt.

Fig. IV (2-5) Lepton-Pion-Verhältnisse für $\sqrt{s} = 53 \text{ GeV}$ und $\theta = 30^\circ$:

a) Innere Konversion weicher, virtueller Bremsstrahlung (IV (2.18))

b) Daten für $\frac{e}{\pi}$ und erwarteter ω, ϱ, ψ -Beitrag, von [7] reproduziert.

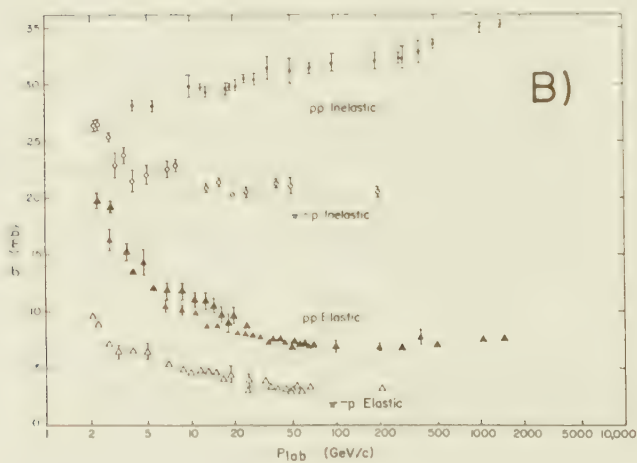
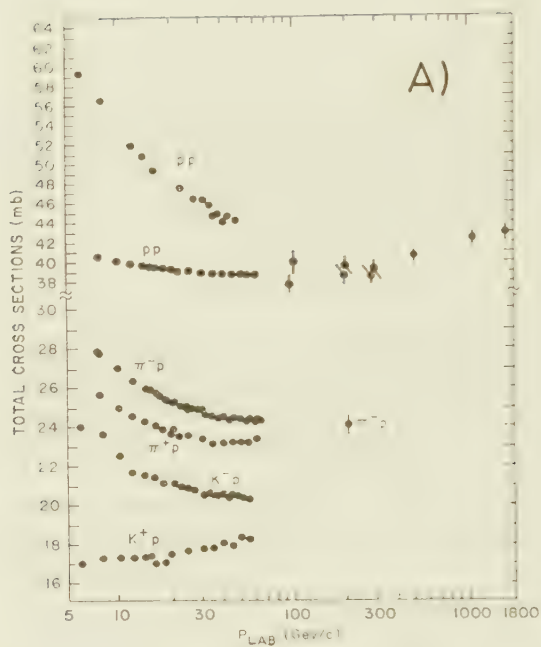


FIG. II(1-1)



FIG. II (1-2)

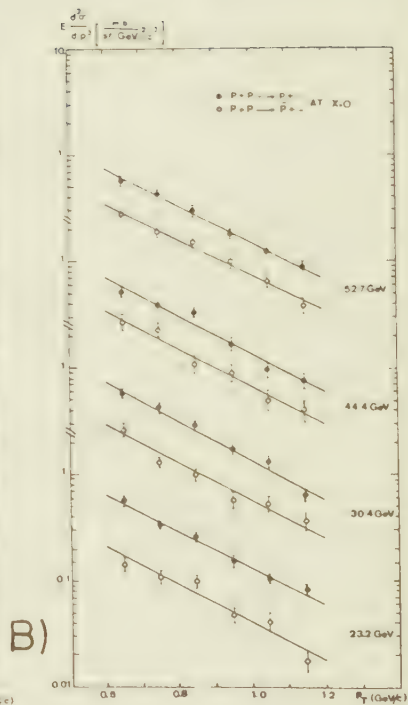
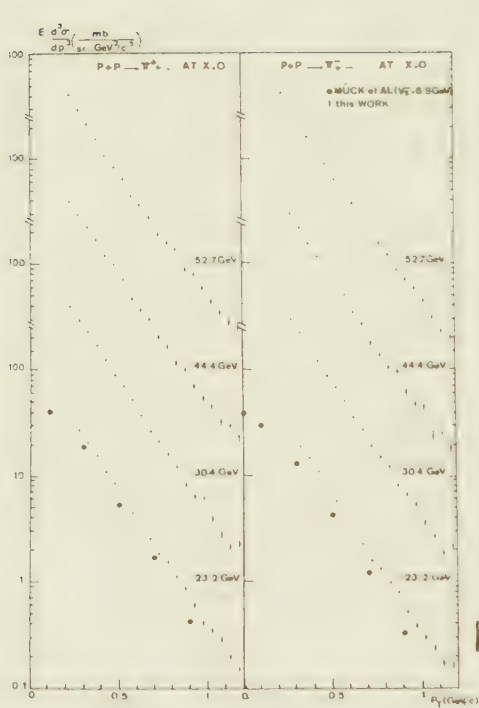


FIG. II(1-2)

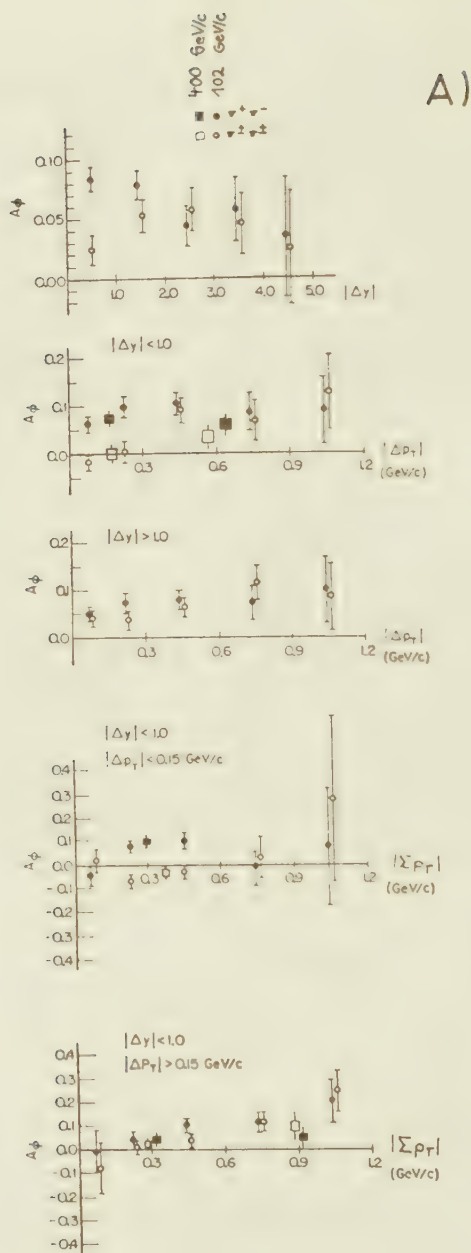


FIG. II (1-4)

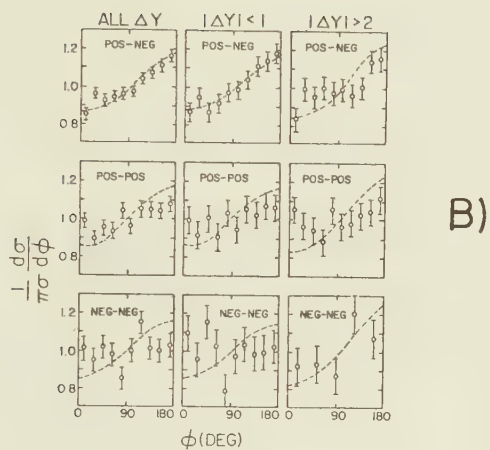


FIG. II (1-4)

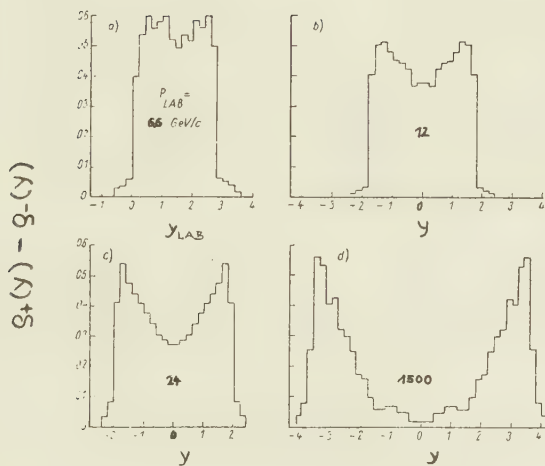


FIG. II (1-5)

A) pp: $p_{\text{LAB}} = 24 \text{ GeV/c}$ x
 $= 102 \text{ GeV/c}$ Δ
 $= 400 \text{ GeV/c}$ •

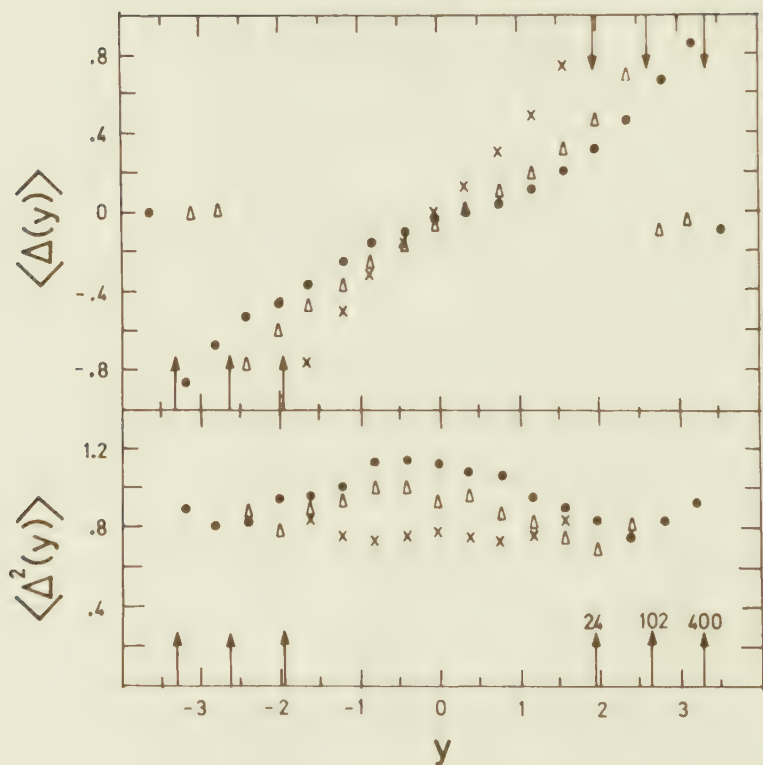


FIG. II (1-6)

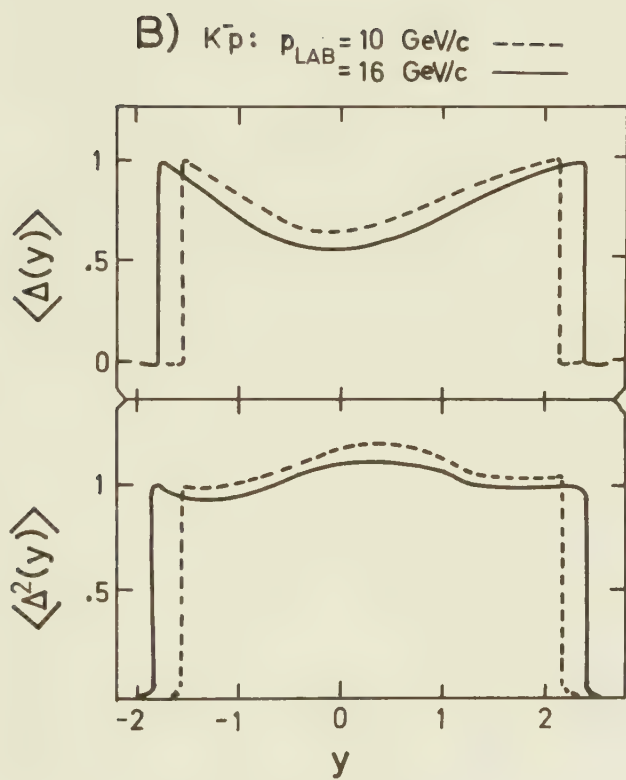


FIG.II (1-6)

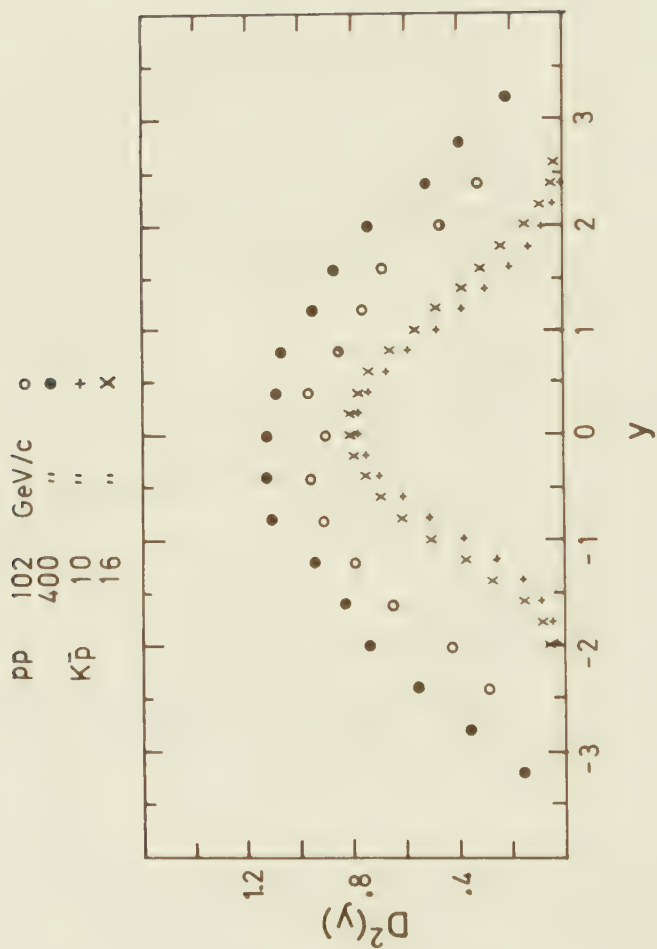


FIG. II(1-7)

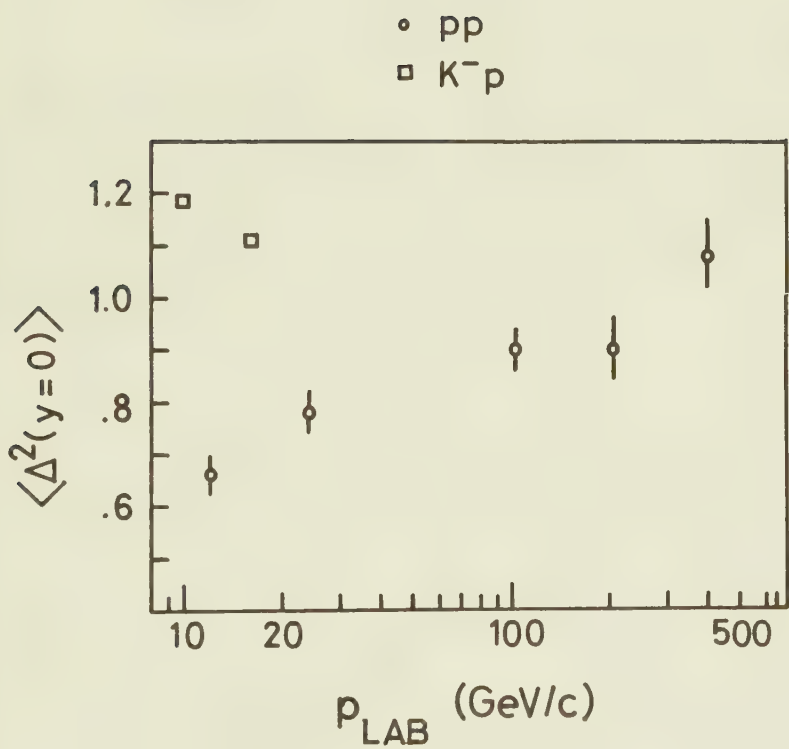


FIG. II (1-8)

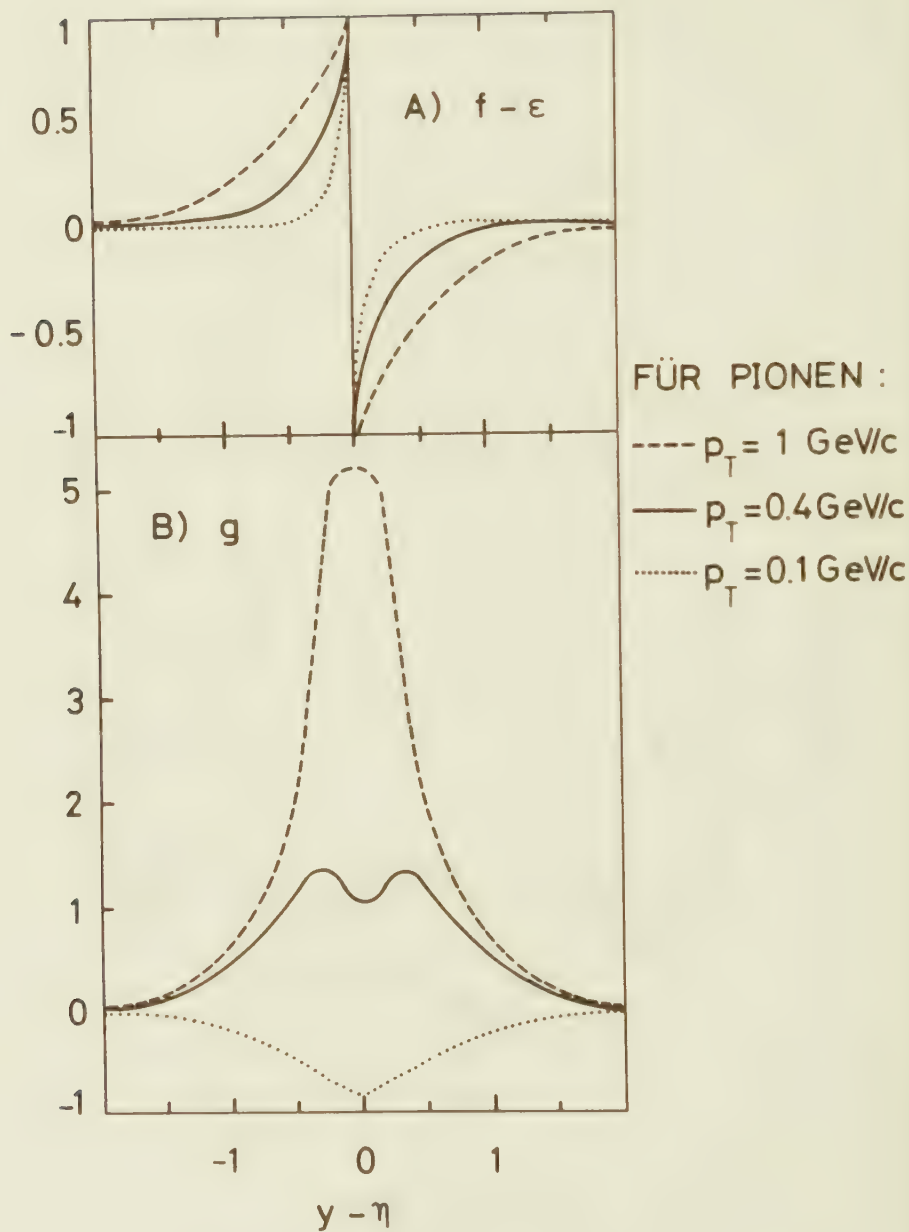


FIG. III(4-1)

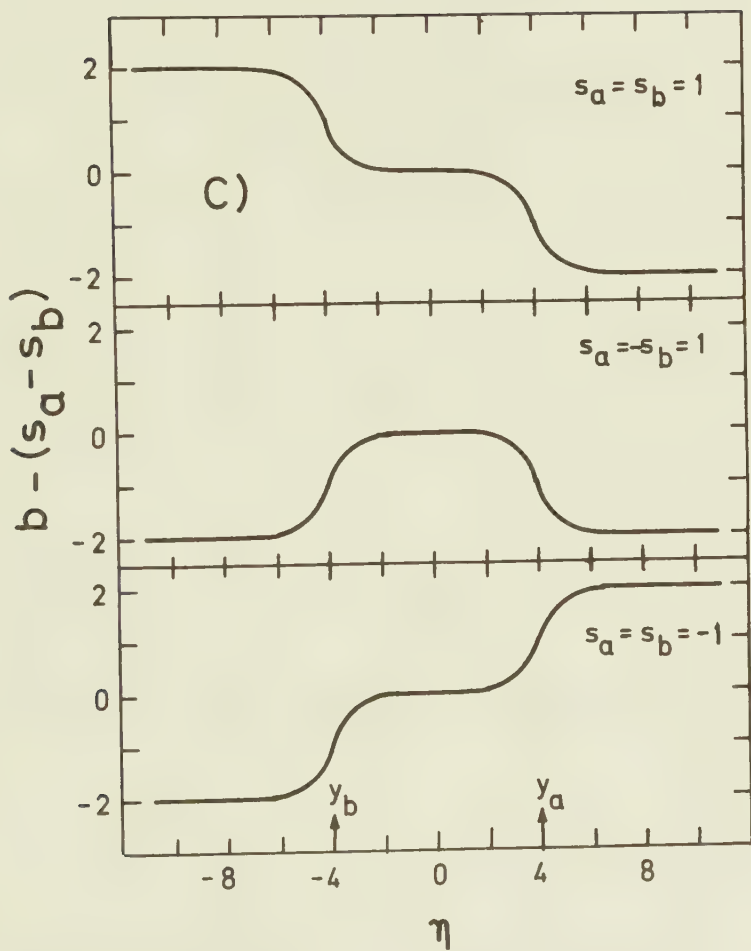


FIG.III (4-1)

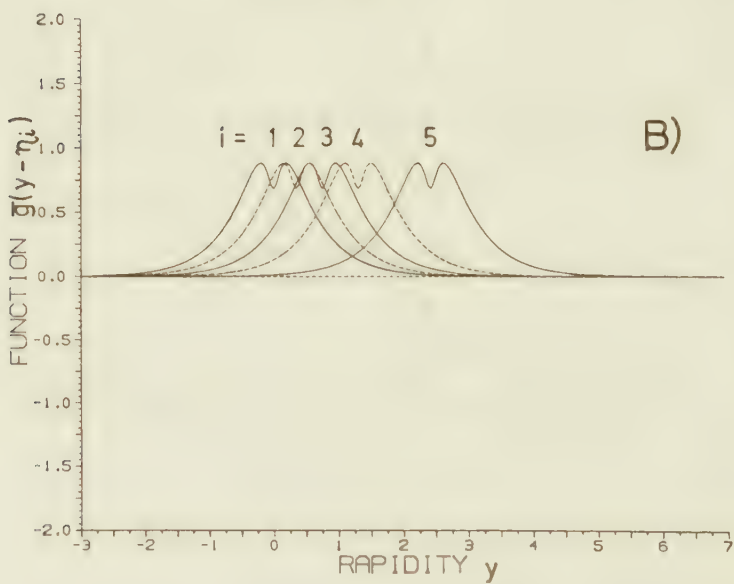
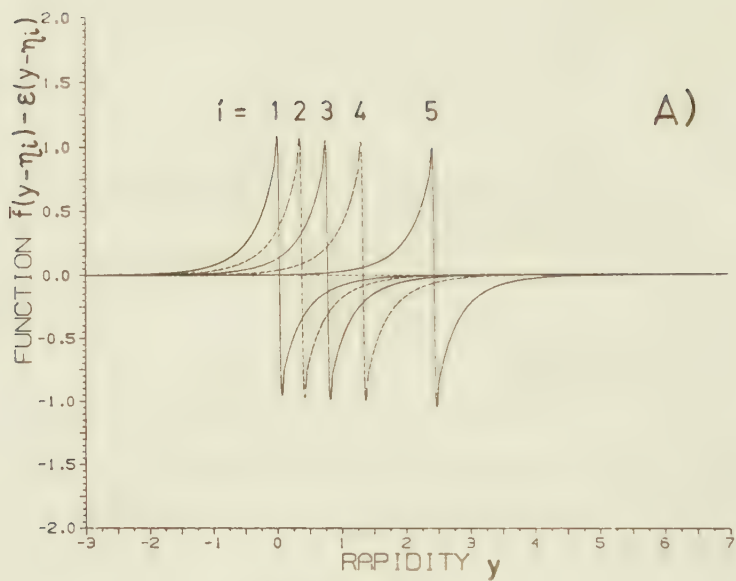


FIG. III (5-1)

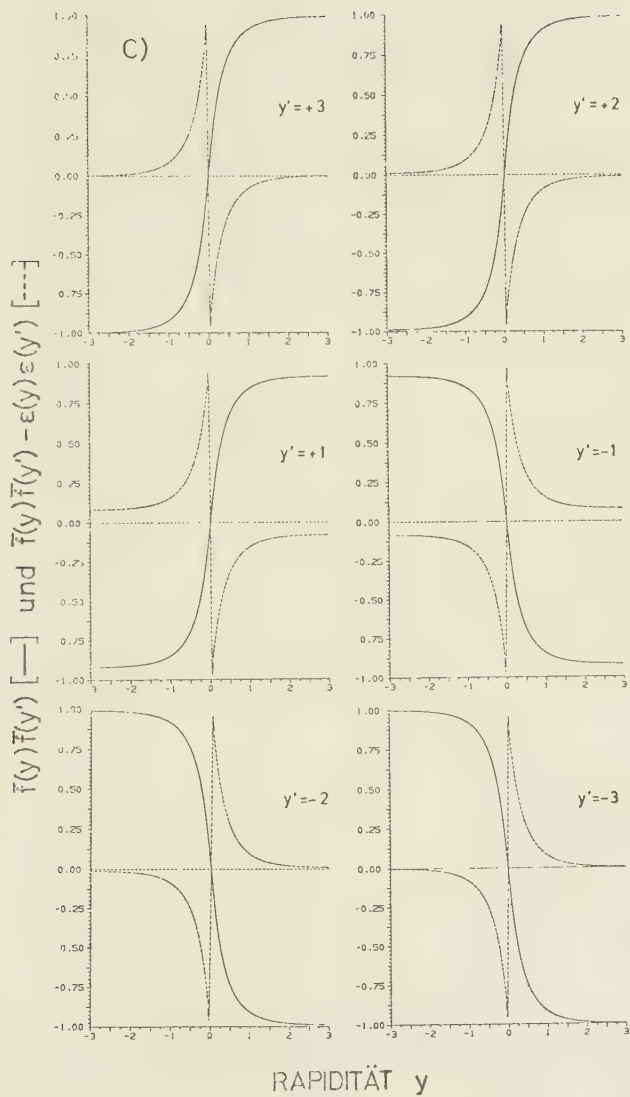


FIG. III (5-1)

$$A) D[R](y, y')$$

4	0	0	0	-.4	-.4	0	0	0	
3	0	0	0	-.4	-.4	-.8	-.8	0	
2	0	0	0	-.4	-.4	-.8	-.8	-.4	
1	0	0	-.4	-.4	-.8	-.4	-.4	-.4	
0									
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

$$B) D[R](y, y') - D[R](y, -y')$$

4	0	0	0	0	
3	0	-.8	-.8	0	
2	0	-.8	-.8	-.4	
1	-.4	0	-.4	-.4	
0					
	0	1	2	3	4

$$C) \bar{f}(y)\bar{f}(y') - 1$$

4					
	0	1	2	3	4
3	-.3	0	0	0	
2	-.3	0	0	0	
1	-.3	-.1	0	0	
0	-.4	-.3	-.3	-.3	

FIG. III(5-2)

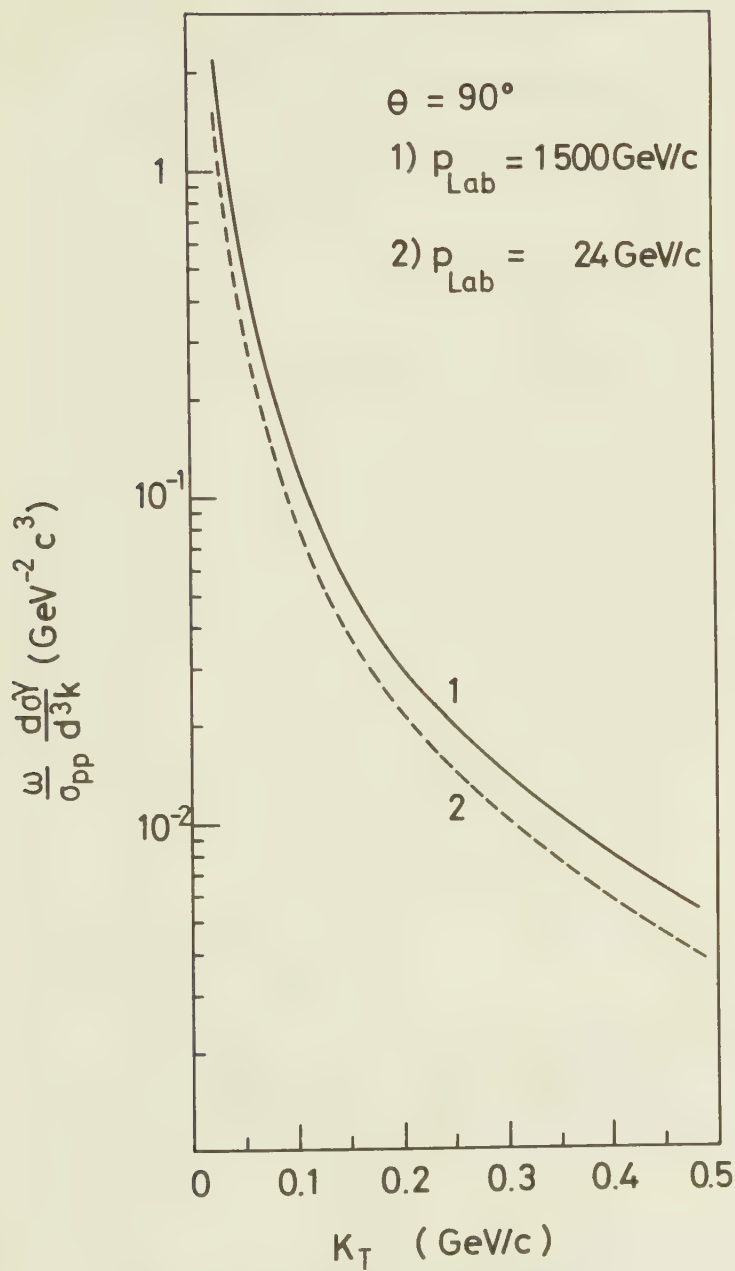


FIG. III(5-3)

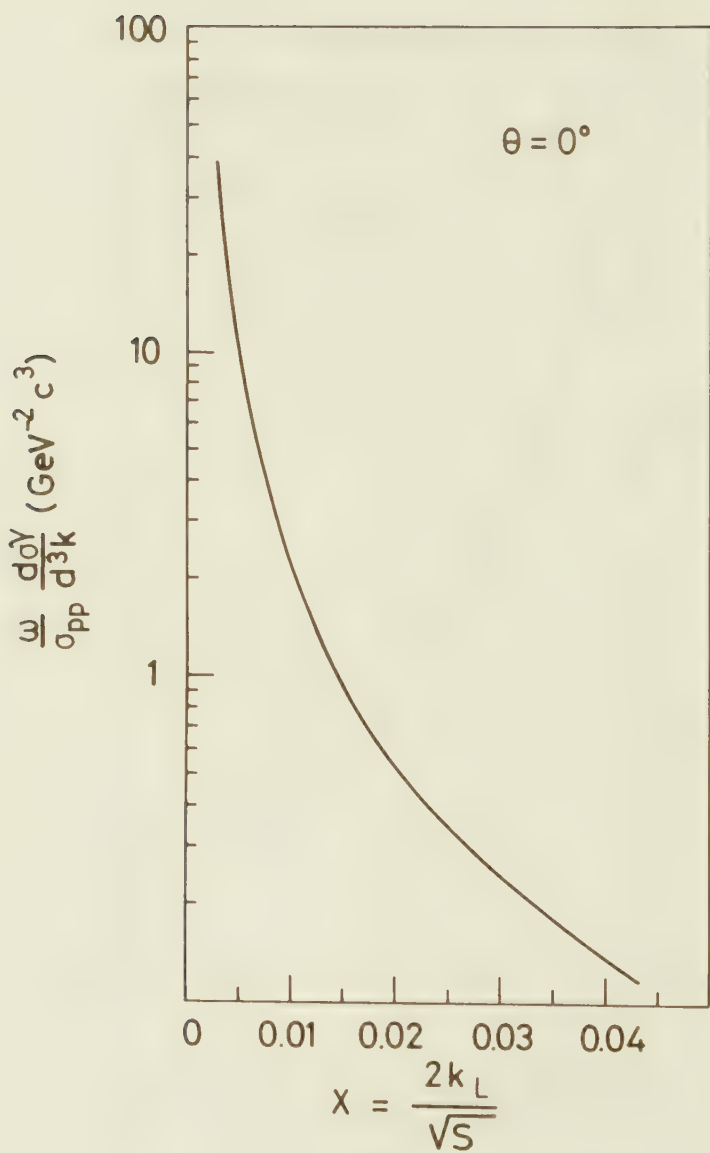


FIG. III(5-4)

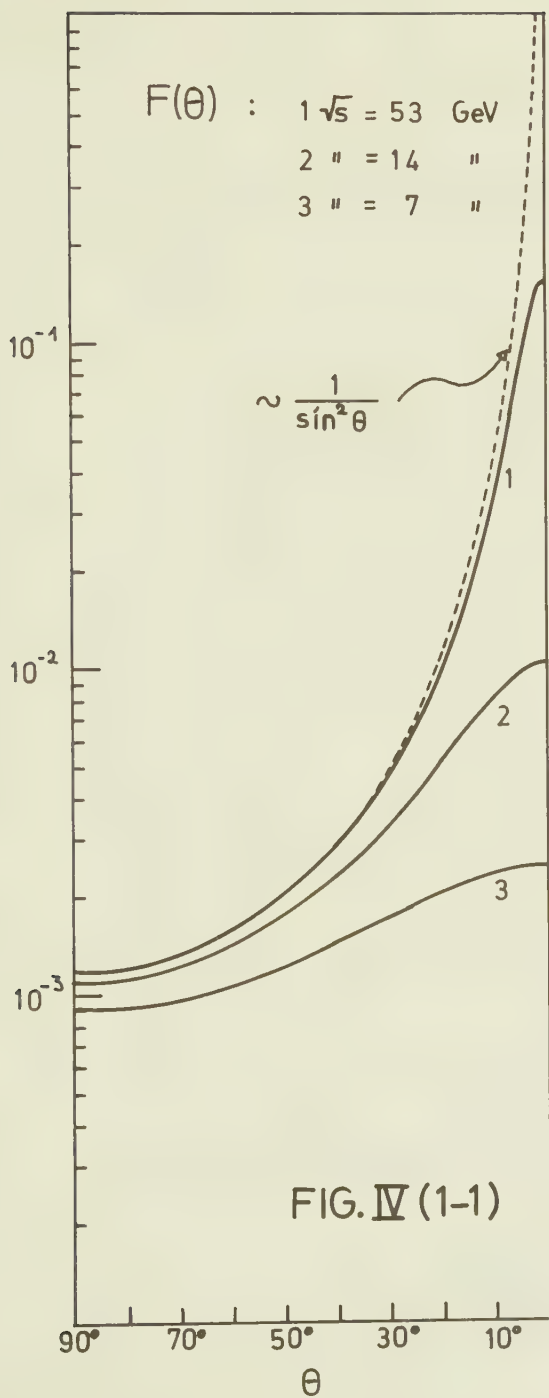


FIG. IV (1-1)

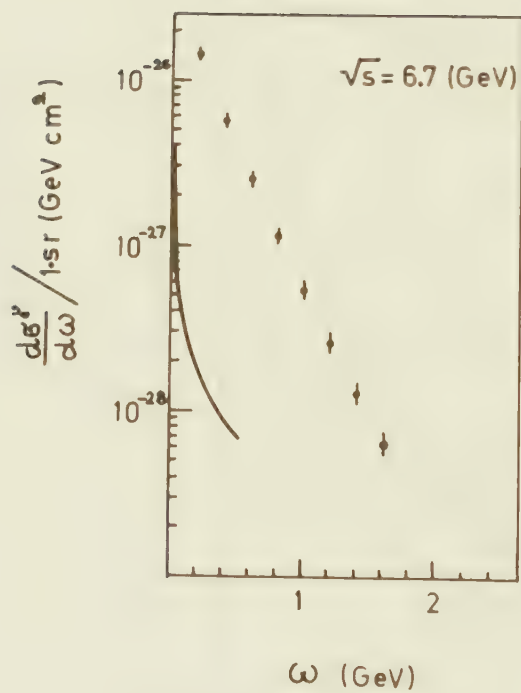


FIG. IV (1-2)

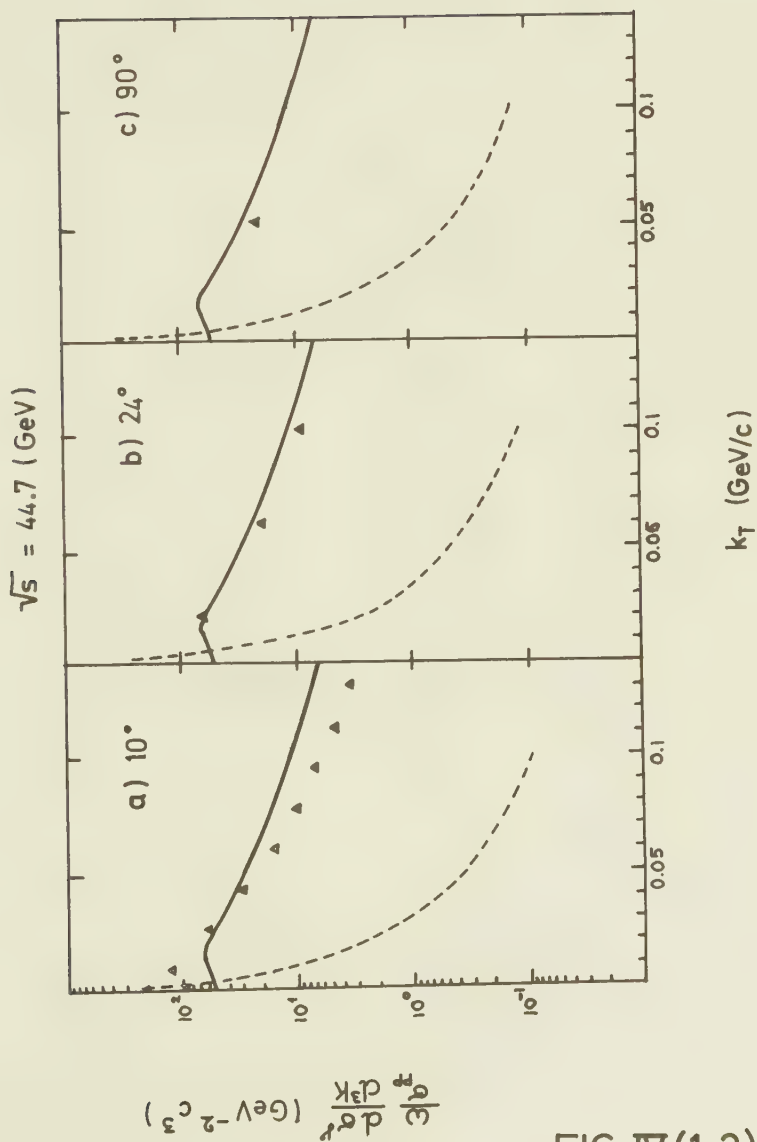


FIG. IV(1-3)

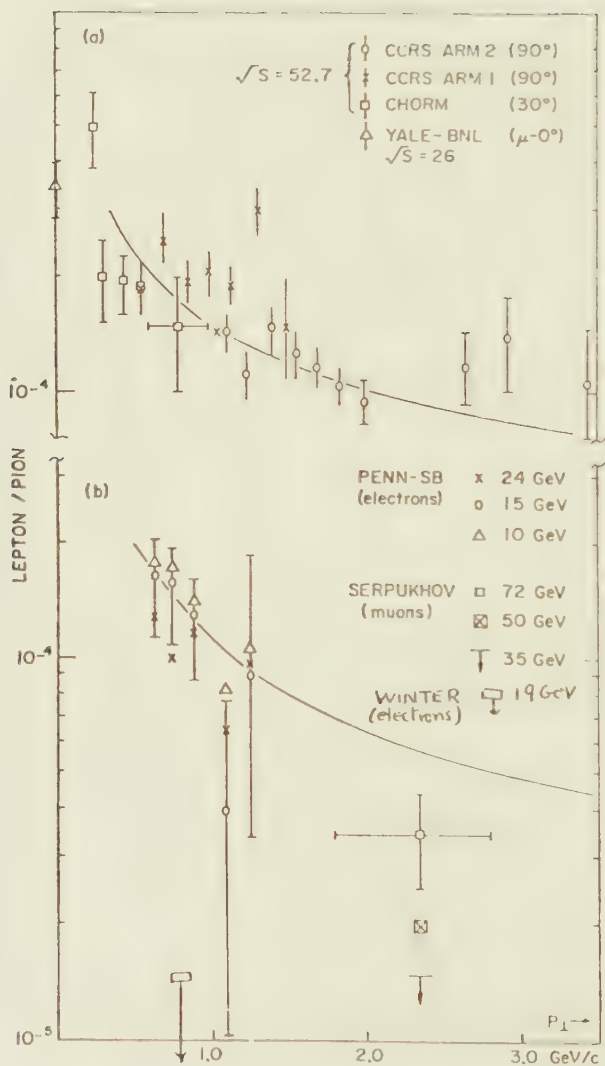


FIG. IV (2-1)

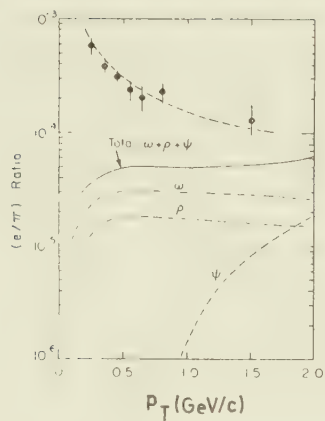


FIG. IV (2-2)

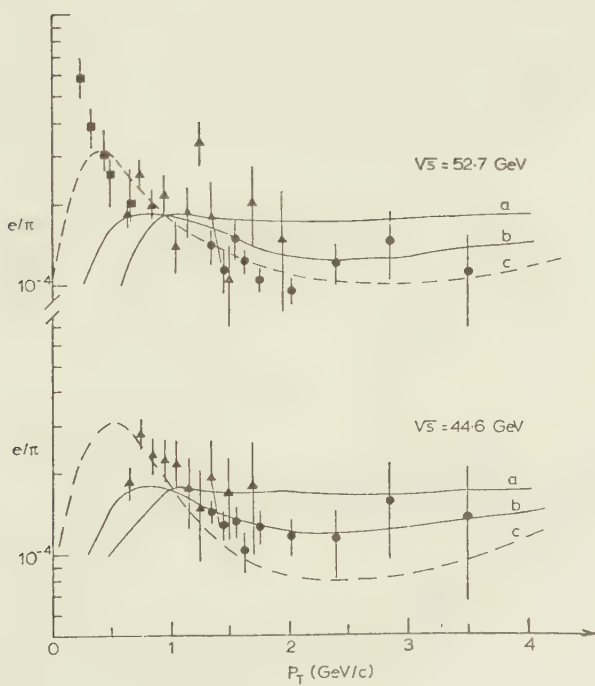


FIG. IV (2-3)

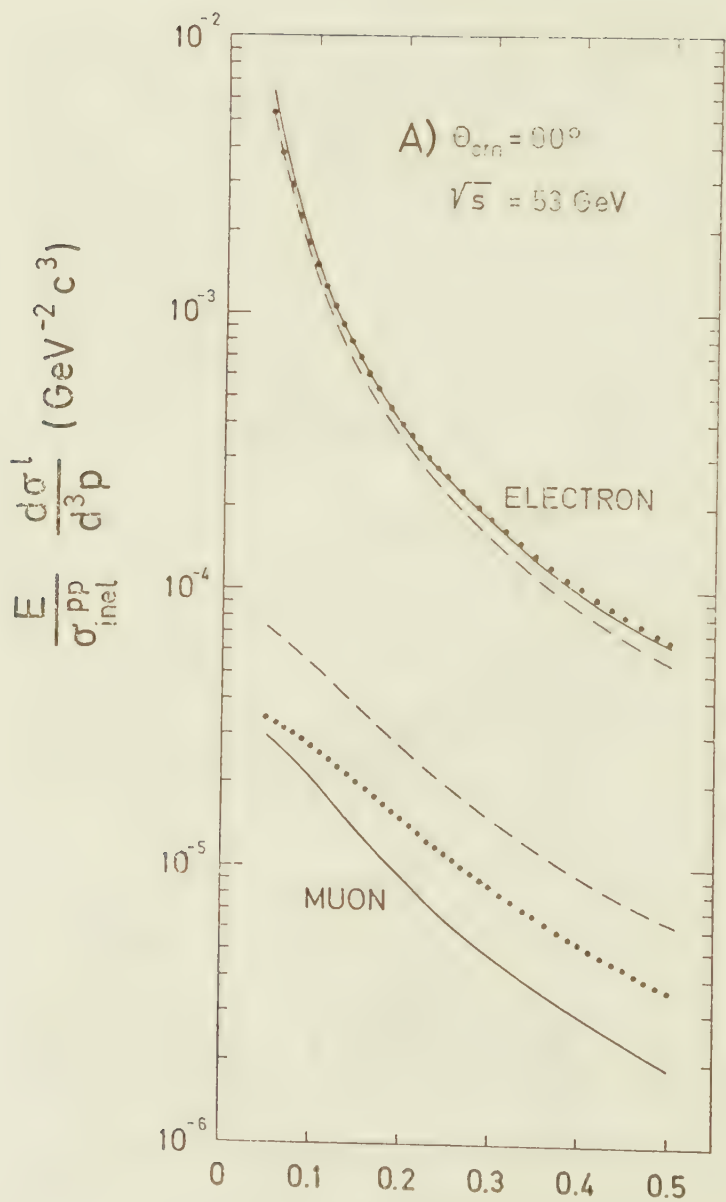


FIG. IV(2-4)

$P_T (\text{GeV}/c)$

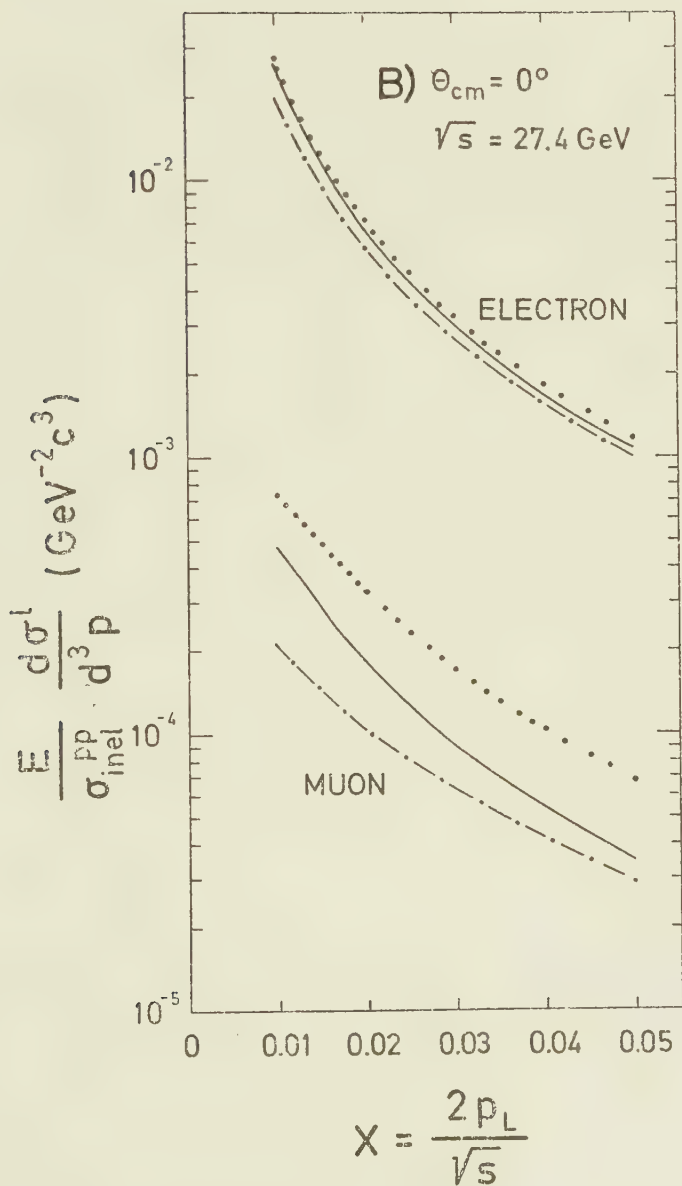


FIG.IV(2-4)

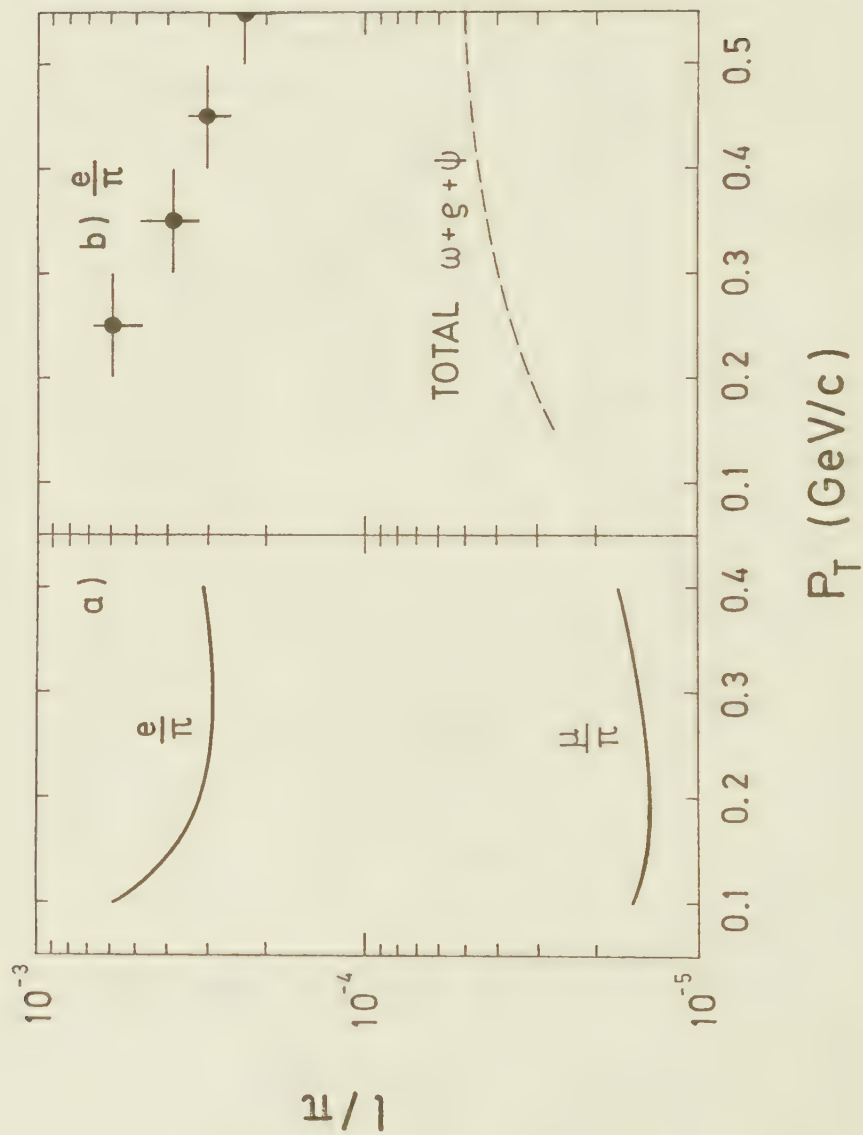


FIG. IV(2-5)

Besonders bedanken möchte ich mich bei Dr. J. Benecke für die Anregung zu dieser Arbeit und viele hilfreiche Hinweise und bei Dr. L. Stodolsky für viele, klärende Diskussionen. Für nützliche Diskussionen bin ich auch Dr. H. Kühn und anderen Mitgliedern des Max-Planck-Instituts für Physik zu Dank verpflichtet. Der Max-Planck-Gesellschaft danke ich für ein Stipendium.

Lebenslauf

Am 8. April 1945 wurde ich als erstes Kind des Schlossers Alois Rückl und seiner Ehefrau Katharina, geb. Langenfelder, in Depoldowitz im Böhmerwald geboren.

Von 1951 bis 1955 besuchte ich die Volksschule in Plattling und von 1955 bis 1964 das Humanistische Gymnasium in Straubing. Nach dem Abitur im Sommer 1964 leistete ich meinen Wehrdienst bis Herbst 1966 ab.

Mit dem Wintersemester 1966/67 begann ich das Studium der Physik an der Universität München. Im Oktober 1968 legte ich die Diplomvorprüfung und im Juli 1971 die Diplomhauptprüfung für Physik ab. Meine Diplomarbeit über "Geometrie in der Quantenphysik" fertigte ich 1969 an am Lehrstuhl für Theoretische Physik, Prof. Dr. F. Bopp, an, wo ich auch ab Herbst 1971 als wissenschaftliche Hilfskraft angestellt war. Seit März 1974 bin ich Doktorand am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München, bei Privatdozent Dr. J. Benecke und seit Januar 1976 wissenschaftlicher Angestellter am selben Institut.

